



Facultad de Ciencias

**CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS
COSMOLÓGICOS MEDIANTE LOS MÉTODOS
MCMC DE LOS DATOS DE PLANCK 2018**

**(CALCULATION OF COSMOLOGICAL PARAMETERS
USING THE MCMC METHODS OF THE 2018 PLANCK
DATA)**

**Trabajo de Fin de Grado
para acceder al**

GRADO EN FÍSICA

Autor: Hamza Akoudad Ekajouan

Director: Diego Herranz Muñoz

Septiembre – 2021

Agradecimientos

Mis agradecimientos a mi familia: Abdenmour, Hakima, Abdelkhalak, Mouna, Manal, Fiorella e Ines. También a mis hermanos Danny y Felipe. Agradecimiento particular a Julio Medina por el tiempo dedicado en mi y Diego Herranz por aceptarme y guiarme en este trabajo que tanto ansiaba hacer.

Dedicatoria

*A la familia que me tocó
y habría escogido.*

Resumen

El objetivo del trabajo es analizar y comprender los resultados obtenidos a través del modelo de Concordancia de la misión de *Planck* del año 2018 para aprender el procedimiento que se utilizó para lograr los parámetros cosmológicos. Además, se pretende entender la formación del fondo cósmico de microondas, los tipos de distorsión del mismo y la forma de tratar los datos recopilados por la misión *Planck* mediante el método Markov Chain Monte Carlo (MCMC).

Para llevar a cabo este objetivo, se estudiaron determinados parámetros cosmológicos mostrados por la misión *Planck*. Estos parámetros son los siguientes: la densidad bariónica $\Omega_b h^2$, la densidad de materia oscura fría $\Omega_c h^2$, la profundidad óptica de reionización τ_{reio} , la densidad de materia Ω_m , el neperiano de la amplitud del espectro escalar $\ln(10^{10} A_s)$, el índice escalar n_s , el tamaño angular del horizonte de sonido en la recombinación θ_{MC} y el parámetro de Hubble H_0 . Los programas utilizados fueron el código CAMB y el muestreador MCMC de Cobaya. Se han obtenido los espectros angulares teóricos del CMB para comprobar la similitud con los espectros presentados por la misión *Planck*.

Los resultados obtenidos tienen una similitud muy alta debido a que se utilizó el mismo procedimiento pero entendiendo las técnicas utilizadas.

Palabras clave: parámetros cosmológicos, cosmología, fondo cósmico de microondas, análisis de datos, CAMB, COBAYA, *Planck*.

Abstract

The objective of the paper is to analyse and understand the results obtained through the Planck Mission Concordance model of 2018 in order to learn the procedure that was used to achieve the cosmological parameters. Furthermore, the aim is to understand the formation of the cosmic microwave background, the types of distortion of the cosmic microwave background, and how to treat the data collected by the *Planck* mission using the Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method.

To carry out this objective, certain cosmological parameters were studied shown by the *Planck* mission, these parameters are the baryonic density $\Omega_b h^2$, the cold dark matter density $\Omega_c h^2$, the optical depth of reionisation τ_{reio} , the matter density Ω_m , the neperian of the amplitude of the scalar spectrum $\ln(10^{10} A_s)$, the scalar index n_s , the angular size of the sound horizon at recombination θ_{MC} and the Hubble parameter H_0 . The programs used were the CAMB code and the Cobaya's MCMC sampler. The teorical angular spectra of the CMB were obtained to check the similarity with the spectra presented by the *Planck* mission.

The results shown in the project expose the comparisons between the *Planck* mission and the results obtained by using the above mentioned programs, achieving a very high similarity due to the fact that the same procedure was used but understanding the techniques used.

Keywords: cosmological parameters, cosmology, cosmic microwave background, data analysis, CAMB , COBAYA, *Planck*.

Índice general

1	Marco teórico	2
1.1	La radiación del fondo cósmico de microondas	2
1.2	Naturaleza de las anisotropías	4
1.2.1	Anisotropías primarias	4
1.2.2	Anisotropías secundarias	5
1.2.3	Anisotropías terciarias	6
1.3	El problema del horizonte y los parámetros cosmológicos	6
1.4	Tratamiento de las anisotropías	9
1.4.1	Espectro angular de potencias de la temperatura del CMB	9
1.4.2	Espectro angular de polarización del CMB	13
1.5	Oscilaciones acústicas de bariones (BAO)	16
2	Datos	18
3	Metodología	20
3.1	Interferencia Bayesiana en la cosmología	20
3.1.1	Prior	22
3.1.2	Likelihood	22
3.1.3	Método Markov Chain Monte Carlo (MCMC)	23
3.2	HEALPix	25
3.3	Camb	26
3.4	Cobaya	26
4	Resultados y análisis	27
4.1	Ajuste de los parámetros con los datos de la misión <i>Planck</i>	27
4.2	Ajuste con los datos de la misión <i>Planck</i> + BAO	32
4.3	Comparación entre los diferentes resultados	34
5	Conclusiones	36
A	Instalación del programa COBAYA	40

Capítulo 1

Marco teórico

En 1963, los laboratorios de Bell encargaron a Arno Penzias y Robert Wilson la instalación de una antena, para su uso en radioastronomía, que se utilizó para obtener la señal de los satélites *Echo* y más tarde *Telstar*. A la hora de la calibración de dicha antena, detectaron un flujo de radiación en la atmósfera que no le encontraban explicación. Aunque orientaron de diferentes maneras la antena, dicho flujo no variaba. Luego de confirmar que no podía tener un procedencia instrumental proseguían con el mismo problema, hasta que unos compañeros les notificaron que algunos astrónomos de Princeton declaraban que podría existir una radiación cósmica de fondo. El resultado del trato entre los diferentes equipos, fue dos artículos enviados al *Astrophysical Journal*, primero una interpretación [12] y después el descubrimiento [24]. Hasta que en la década de los 70 casi toda la comunidad científica aceptó que esta radiación era producto del Big Bang. [10]

Esta radiación fue denominada fondo cósmico de microondas (*Cosmic Microwave Background*, CMB). A partir de ese momento, el CMB y posteriormente las anisotropías de temperatura y la polarización del CMB, se han convertido en una de las formas más poderosas de estudiar la cosmología y la física del Universo primitivo. Mediante el CMB y otras formas de extraer información del vasto Universo se logró construir el modelo cosmológico de Concordancia, denominado modelo Λ CMD. Esta denominación es debido a la presencia de la constante cosmológica que tiene gran relevancia en el modelo, mientras que las siglas CMD se refiere a *cold dark matter*, que describe la materia oscura que solo interacciona de manera gravitacional.

Dicho modelo depende de varios parámetros que expresan la composición, geometría y condiciones iniciales del Universo. Este trabajo revisa y compara los resultados obtenidos con diversos resultados de la misión *Planck*. De esta forma se logra conocer y entender la metodología utilizada en dicha investigación [25] [26].

1.1. La radiación del fondo cósmico de microondas

La radiación del CMB llena todo el Universo y se caracteriza por su gran isotropía (el Universo presenta las mismas propiedades en todas las direcciones del cielo, una variación de temperatura de 10^{-6} de distintas zonas) y por tener una distribución espectral de cuerpo negro casi perfecta.

Por lo que se sabe actualmente, sólo los procesos térmicos, es decir, los procesos producidos por un sistema en equilibrio térmico, son capaces de producir una distribución espectral de cuerpo negro.

Por otra parte, la alta isotropía de la radiación y su espectro descartan que su origen sea local (Sol o Sistema Solar), galáctico o por fuentes extragalácticas. Asimismo, no se conocen mecanismos capaces de producir una radiación de estas propiedades en galaxias o cúmulos de galaxias. Por lo tanto, ha de producirse en todo el Universo, sin una ubicación definida. Tampoco se sabe de mecanismos posible que puedan producir dicha radiación en el universo actual, lo cual sugiere a que se generó en etapas anteriores de la historia del Universo [10].

El Big Bang se entiende como el escenario en el que el Universo pasó por una fase primordial extremadamente caliente y densa, esto no implica necesariamente una singularidad inicial.

La base de estos modelos radica en la idea de que el Universo primordial era lo suficientemente denso y caliente para que casi todo su contenido estuviera en equilibrio termodinámico. En este caso, las leyes de la termodinámica permiten calcular las características de las distintas poblaciones de partículas y su presencia. Esta radiación electromagnética se tiene un comportamiento de radiación de cuerpo negro debido a que el propio Universo se comportó como un cuerpo negro.

Hace mucho tiempo que el Universo estaba en equilibrio térmico. Sin embargo, uno de los principales acontecimientos que marcan el fin de este acoplamiento entre la materia y la radiación recibe el nombre de **recombinación** que sucedió 400 mil años después del Big Bang, cuando la temperatura disminuyó lo suficiente como para que se combinaran electrones y protones.

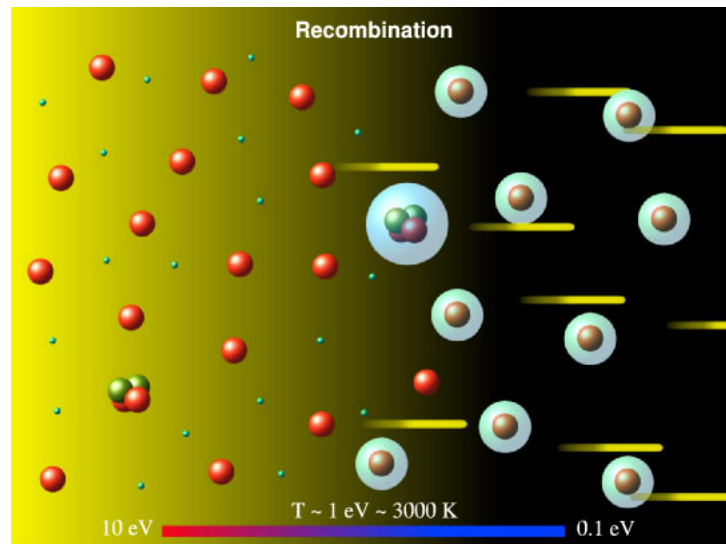


Figura 1.1: Época de la recombinación [1].

Antes de la **recombinación** la materia estaba ionizada, los electrones eran libres y la densidad de fotones era muy alta. Las colisiones eran frecuentes entre fotones y electrones que aseguraban el equilibrio entre la materia y la radiación. Por ello, el universo era opaco y cualquier información transportada por un fotón se perdía rápidamente durante

las continuas dispersiones con los electrones libres. En consecuencia, la astronomía óptica y la radioastronomía no pueden revelar nada sobre este período. La radiación cósmica de fondo de microondas data de la época de la recombinación, es decir, del momento en que el universo se volvió transparente. Debido a este hecho, nos proporciona la información más temprana que podemos esperar recibir sobre el Universo, al menos en forma de radiación electromagnética.

1.2. Naturaleza de las anisotropías

Después de la formación del CMB, la gran mayoría de los fotones no vuelven a intercambiar energía con la materia, esto conlleva a conservarse el espectro de cuerpo negro creado. No obstante, existe una sucesión de fenómenos que pueden alterar los fotones de la radiación de fondo de microondas, bien con deformaciones globales del espectro de cuerpo negro o generando **anisotropías**, que son distorsiones direccionales. El primer caso no se analizará, que corresponde a la **distorsión global**, mientras que el segundo caso corresponde a una variación que depende de la dirección.

Se define la anisotropía de la radiación de fondo como las diferencias existentes en la temperatura $T(\theta, \phi)$ del espectro de cuerpo negro al observar direcciones distintas del cielo. Las anisotropías se clasifican en cuanto a su origen como: **anisotropías primarias**, entendidas como las registradas en la superficie del última dispersión, **anisotropías secundarias**, producidas en el camino seguido por los fotones del CMB desde el desacoplamiento hasta la actualidad y **anisotropías terciarias**, ocasionadas por la contribución de otro origen distinto al CMB, es decir, otras fuentes diferentes al fondo cósmico de microondas.

1.2.1. Anisotropías primarias

Las anisotropías primarias se originan en el momento del desacoplamiento entre la materia y la radiación y que presenta las características que tenía el fluido fotón-barión antes y en el instante del desacoplamiento. Se encuentran diferentes fenómenos que explican estas anisotropías pero solo se comentará lo más importantes.

■ Variaciones de densidad

Una variación de densidad respecto a la densidad media causada, por ejemplo, por fluctuaciones primordiales, origina una variación de temperatura con respecto a la temperatura media. Es decir, produce una anisotropía en el CMB. La proporcionalidad que relaciona las variaciones de temperatura con las variaciones de densidad de energía (la ley de Stefan-Boltzmann), logrando una relación entre la temperatura, densidad de energía de los fotones y la materia bariónica:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta \rho_b}{\rho_b} = \frac{\Delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} \quad (1.1)$$

Por consiguiente, las zonas donde la densidad es más baja (alta) que la densidad media se corresponde con regiones que presentan una disminución (incremento) de

la temperatura con respecto a la temperatura media. La relación 1.1 expresa las llamadas **fluctuaciones de densidad adiabática**.

- **Efecto Sachs-Wolfe primario**

La variación de densidad crea un potencial gravitatorio. Esto, conforme al principio de equivalencia, cuando un fotón se mueve dentro de un campo gravitatorio heterogéneo sufre un cambio en su energía que representa un desplazamiento al rojo gravitatorio. En lo que respecta a los fotones del CMB, la consecuencia se deriva en un descenso de la temperatura del cuerpo negro. Se produce debido a que los fotones recibidos originados de la fluctuación de densidad deben vencer el campo gravitatorio, que está causado por dichas fluctuaciones.

1.2.2. Anisotropías secundarias

Las anisotropías secundarias se ocasionan después de la combinación, en el recorrido que siguen los fotones hasta el observador. Se hallan una variedad de efectos, de los cuales los más destacados son: el efecto Sunyaev-Zel'dovich, efecto Sachs-Wolfe integrado y las lentes gravitatorias.

- **Efecto Sunyaev-Zel'dovich:**

Este efecto se caracteriza por los fotones que pasan por las zonas centrales de los cúmulos de galaxias que contienen electrones a muy altas temperaturas $\approx 10^8$ K, estos, por efecto Compton inverso provocan un aumento de la energía y consigo de la temperatura en los fotones adquiriendo una anisotropía en esa región.

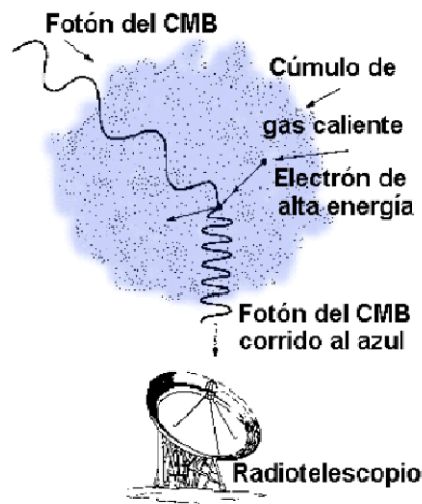


Figura 1.2: Proceso del efecto Sunyaev-Zeldovich. [2]

- **Efecto Sachs-Wolfe integrado :**

Los fotones del CMB al entrar en un campo gravitatorio sufrirá un desplazamiento al azul y al salir un desplazamiento al rojo. Si en ese tiempo en el que se encuentra los

fotones dentro el campo no varía ambos efectos se cancelan, pero si varían mientras está atravesando dicho campo los efectos ya no se cancelan por lo que se producirá un desplazamiento al rojo o azul neto. Este efecto solo sucede en los fotones que atraviesan el campo gravitatorio.

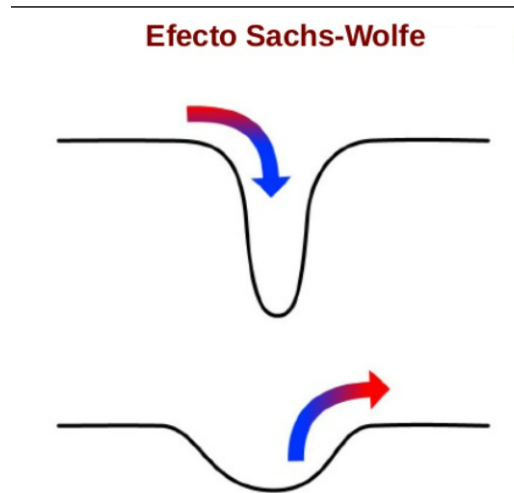


Figura 1.3: Ilustración del efecto Sachs-Wolfe integrado. [3]

- **Lentes gravitatorias :**

La gran distancia a la que se encuentra la superficie del última dispersión favorece que los fotones del CMB atraviesen multitud de concentraciones de materia. El efecto lente causado por un objeto situado en la línea de visión de la anisotropía, produciendo una alteración del gradiente en los alrededores de la zona de donde se encuentra dicho objeto.

1.2.3. Anisotropías terciarias

Estas últimas anisotropías son debidas a radiofuentes diferentes del CMB, que pueden ser objetos, como las radio galaxias o cuásares. Generalmente, las anisotropías terciarias se extraen de los mapas del CMB para poder analizar las otras anisotropías dichas anteriormente.

1.3. El problema del horizonte y los parámetros cosmológicos

Previamente se estableció que la radiación del CMB presenta isotropía. Esta isotropía indica que toda la superficie de la última dispersión que se observan en la actualidad estaba en equilibrio térmico a la misma temperatura cuando sucedió el desacoplamiento. Esto conlleva un problema denominado como el **problema del horizonte**, ya que implica que en aquel momento toda esa fracción del Universo estaba en contacto casual, es decir,

dentro del mismo horizonte de partículas (la distancia máxima que la luz podrían haber viajado dado un tiempo determinado). De no ser así, los fotones de una región no habrían podido interactuar con la materia de otra región, alcanzando el equilibrio térmico a una misma temperatura, pues la luz no le dio tiempo para viajar de una zona para que ambas zonas tengan un contacto casual. Solamente la materia y radiación que se encuentran dentro del horizonte de partículas puede hallarse en equilibrio térmico [19]. Otro problema que se encuentra es que según el modelo estándar de la mecánica cuántica, debido a las altísimas temperaturas alcanzadas en los inicios del Universo se debieron haber producido un importante número de **monopolos magnéticos** estables [23]. En cambio, estos monopolos nunca han podido ser observados.

La solución llegó en 1981, donde el estadounidense Alan Guth planteó un modelo del Universo en donde tiene una expansión exponencial [15]. El modelo propuesto solucionaría el problema del horizonte ya que el Universo inicialmente era pequeño, de tal manera que hubo un tiempo en el que dos regiones en contacto casual ahora estén aisladas una de la otra. Asimismo, los monopolos magnéticos que se crearon se esparcieron en el vasto Universo de tal manera que no se han podido observar hasta el momento. De esta forma, se solventa el problema del horizonte y los monopolos magnéticos. Otra característica de este modelo inflacionario, es que también explica la geometría plana del Universo.

Ahora bien, la inflación postula una período de expansión acelerada del Universo, consecuencia de una energía de presión negativa. Esta forma de energía conforma la energía potencial de un campo escalar designado como **inflatón**. En la fase donde dominó el inflatón, sus fluctuaciones generaban variaciones en la métrica, es decir, curvaba el espacio-tiempo. A estas fluctuaciones primordiales se les denomina fluctuaciones de curvatura. De esta forma, la teoría de la inflación predice un espectro de potencia de curvatura invariante a escala, introduciendo así un espectro primordial de ley de potencias:

$$\mathcal{P}_R(k) = A_s \frac{k^{n_s-1}}{k_0}, \quad (1.2)$$

donde k es el número de onda, A_s es la amplitud del espectro escalar, k_0 es una referencia arbitraria denominada como pivote de escala, que se tomará $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ como en la misión *Planck* y n_s es el índice espectral escalar. El índice n_s permite extraer información sobre las variaciones de las perturbaciones con k .

Otra importante característica es que el principio cosmológico permite que la métrica del espacio-tiempo se puede escribir de la forma más general, conocida como Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = dt^2 - a(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right), \quad (1.3)$$

donde r , θ y ϕ son las coordenadas esféricas, K es el parámetro de curvatura que puede tener valor 1, 0, -1 que determina la curvatura del Universo, $a(t)$ es el factor de escala que describe la manera de crecimiento del espacio en el transcurso del tiempo.

El comportamiento del factor escalar y la constante de curvatura están determinados por las ecuaciones de campo de la relatividad general de Einstein como funciones de la materia-energía en el Universo. Ambos dependen también de otra constante, la llamada constante cosmológica Λ . Si suponemos que el espacio es homogéneo e isótropo y además

que la constante cosmológica es cero, entonces las ecuaciones de Einstein toman la forma simple :

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p) \quad (1.4)$$

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{K}{a(t)^2}, \quad (1.5)$$

donde G es la constante de gravitación universal. Estas ecuaciones están escritas en un sistema de unidades en el que la velocidad de la luz c , toma el valor 1. De esta forma definimos el parámetro de Hubble H_0 como:

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (1.6)$$

dicho parámetro define la variación del factor de escala respecto al valor actual del mismo. Posteriormente tomando una curvatura nula ($K = 0$) en la expresión 1.5 se define la densidad crítica ρ_c , que es la densidad a la cual el Universo tomaría una geometría euclídea.

Ahora bien, para efectuar mediciones de variables del Universo, además de los parámetros citados anteriormente, se define el parámetro de densidad Ω_x que es la razón entre la densidad actual ρ_x respecto a la densidad crítica ρ_c . Hay diferentes tipos de parámetros de densidad, los más destacados son:

$$\Omega_b = \frac{\rho_b}{\rho_c} \quad \Omega_c = \frac{\rho_{CDM}}{\rho_c} \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c}, \quad (1.7)$$

donde Ω_b es la densidad de materia bariónica, Ω_c es la densidad de materia oscura fría y Ω_m es la densidad de materia (materia oscura más la bariónica). Para las densidades bariónica y de materia oscura se utilizará la nomenclatura $\Omega_b h^2$ y $\Omega_c h^2$, donde h es:

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (1.8)$$

Posteriormente, se definirá dos parámetros más que son de vital importancia en el trabajo. En primer lugar, el tamaño angular característico de las fluctuaciones en el CMB denominado escala acústica. Dicho parámetro describe el tamaño angular del horizonte de sonido en el momento del desacoplamiento. El tamaño angular se aproxima mediante el horizonte de sonido r_s y la distancia angular comóvil a la que se detecta D_A de la siguiente manera:

$$\theta_{MC} = \frac{r_s}{D_A}. \quad (1.9)$$

Hay que destacar que en el trabajo se utiliza la tamaño angular multiplicado por 100 y se representará como $100\theta_{MC}$.

En la recombinación, como se dijo anteriormente en la sección 1.1, los fotones quedan libres de interacciones y viajan casi sin interactuar con otras partículas desde la última vez que fueron dispersados por un electrón. Durante un pequeño intervalo de tiempo dt , la probabilidad de que un fotón participe de un proceso de scattering es $dP = \Gamma(t) dt$, donde $\Gamma(t)$ es la tasa de scattering al tiempo t . Es decir, que si se detectara un fotón del

CMB a tiempo t_0 , el número esperado de dispersiones en las que haya participado desde un tiempo t anterior es:

$$\tau_{reio}(t) = \int_t^{t_0} \Gamma(t) dt \quad (1.10)$$

donde τ_{reio} es la profundidad óptica de reionización. El tiempo t para el cual $\tau_{reio} = 1$ corresponde a la última dispersión y representa el tiempo transcurrido desde que un fotón cualquiera del CMB fue dispersado por última vez por un electrón libre. No todos los fotones fueron dispersados al mismo tiempo, de modo que la superficie del CMB es más bien una cáscara con cierto grosor.

En este trabajo se analizará los parámetros descritos anteriormente ya que tienen una relevancia física de gran importancia.

1.4. Tratamiento de las anisotropías

1.4.1. Espectro angular de potencias de la temperatura del CMB

Para estudiar las anisotropías del CMB, se puede definir la anisotropía midiendo la desviación de la temperatura del CMB en cada dirección del espacio respecto de la temperatura media:

$$\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T} = \frac{T(\theta, \phi) - T}{T} \quad (1.11)$$

Si se considera que se logra un cartografiado de la temperatura de radiación cósmica de fondo sobre todo el cielo. Se puede demostrar que cualquier función continua evaluada sobre la superficie de una esfera puede expresarse en función de armónicos esféricos $Y_{\ell m}$ denominada **serie de Laplace**. En consecuencia, la variación de la temperatura en función de armónicos esféricos en la dirección (θ, ϕ) puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^{TT} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (1.12)$$

donde el coeficiente $a_{\ell m}$ es el coeficiente asociado a la expansión de $\Delta T/T$ en términos de la función $Y_{\ell m}$:

$$a_{\ell m}^{TT} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T} Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.13)$$

En la práctica, lo que se determina es la temperatura media del cielo en cada dirección (θ, ϕ) dentro de un círculo de radio $\Delta\theta$ cubierto por la antena utilizada. Con estas condiciones, no se consigue detectar anisotropías a escalas angulares inferiores a $\Delta\theta$, dicho de otras manera, las ℓ del desarrollo de la expresión 1.12 están limitadas a un valor máximo $1/\Delta\theta$:

$$T_{\Delta\theta}(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^{TT} Y_{\ell m}(\theta, \phi) W_{\ell}(\Delta\theta), \quad (1.14)$$

donde $W_\ell(\Delta\theta)$ es una función ventana que detiene la suma para los valores $\ell > 1/\Delta\theta$.

Si se aplica el cuadrado a la expresión anterior y se promedia para todas las direcciones se puede escribir:

$$\langle T_{\Delta\theta}^2(\theta, \phi) \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}^{TT}|^2 |W_\ell(\Delta\theta)|^2 \quad (1.15)$$

El fondo cósmico de microondas es isótropo en el aspecto de que no hay direcciones privilegiadas en las que las anisotropías estén localizadas. De esta forma, en diferentes modelos que se ajusten con los datos, los coeficientes $a_{\ell m}^{TT}$ promedian a cero para cada (ℓ, m) . Por lo tanto, para obtener estadísticamente la potencia en las anisotropías es imprescindible recurrir a las varianzas de los coeficientes, de esta manera, se define el espectro de potencias para la temperatura C_ℓ^{TT} :

$$\langle a_{\ell m}^{TT} a_{\ell m'}^{TT*} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_\ell^{TT} \quad (1.16)$$

En la determinación del espectro de potencias hay una dificultad, no se puede medir valores esperados. Por lo tanto, para realizar el proceso estocástico se define el promedio sobre m de $|a_{\ell m}^{TT}|^2$ y estableciendo un estimador del espectro de potencias de temperatura:

$$\hat{C}_\ell^{TT} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}^{TT}|^2 \quad (1.17)$$

Cumpliendo que sea un estimador insesgado:

$$\langle \hat{C}_\ell^{TT} \rangle = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}^{TT}|^2 = C_\ell^{TT} \quad (1.18)$$

Al manejar el estimador \hat{C}_ℓ^{TT} se comete un error denominado **varianza cósmica** (σ_ℓ) y es un error propio a la medida de los C_ℓ :

$$\frac{\sigma_\ell}{C_\ell} = \sqrt{\frac{2}{2\ell + 1}} \quad (1.19)$$

Como se puede observar en la expresión 1.19, para cada valor de ℓ hay $2\ell + 1$ valores posibles de m que muestrean la distribución. Para valores pequeños de ℓ , es decir, escalas grandes el error de la varianza cósmica es muy grande, mientras que para valores de ℓ grandes, es decir, para escalas menores el error es menor. En esta investigación no se usará los errores ya que nuestro objetivo es compararla con la investigación de *Planck* [4].

El espectro angular de potencias de la temperatura del fondo cósmico de microondas ha demostrado ser una mina de oro de información sobre la composición física del universo, mostrando las variaciones de temperatura a diferentes escalas angulares $\theta = \pi/\ell$ (interacción entre dos lugares del cielo). Las parte más destacadas de dicho espectro son las siguientes:

En primera instancia, se tiene **la meseta de Sachs-Wolfe** que expresa las condiciones iniciales de las fluctuaciones primordiales. Al haber un fluido barión-fotón que al expandirse y comprimirse genera ondas de sonido que viajan a través del fluido. Por lo tanto,

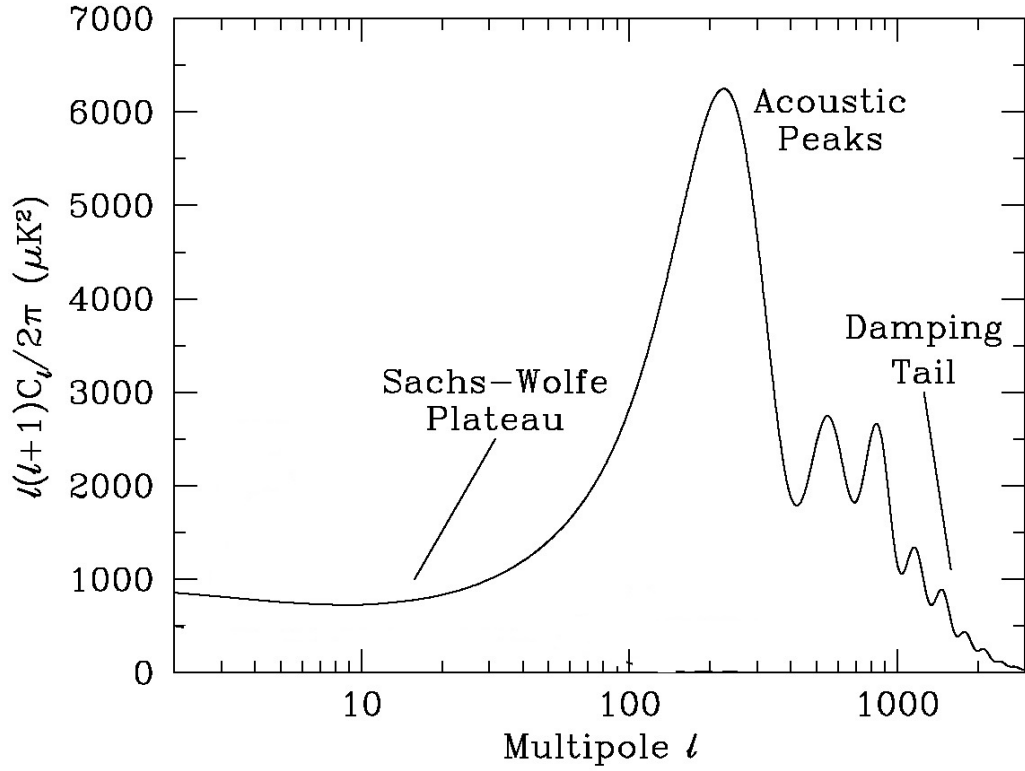


Figura 1.4: Partes del espectro angular de potencias. [5]

en un tiempo determinado solo viajaría lo que tardó en efectuarse el desacoplamiento entre fotones y bariones. Esto conlleva a que en algunas zonas no hayan interactuado las ondas de sonido y por lo tanto la meseta de Sachs-Wolfe refleja escalas fuera del horizonte del sonido en el momento del desacoplamiento.

Posteriormente, se encuentran los **picos acústicos**, donde el plasma de protones y electrones estaba fuertemente acoplado a los fotones, estos componentes se comportaban como un único "fluido fotón-barión", en el que los fotones proporcionaban la mayor parte de la presión y los bariones la inercia. Por lo tanto, en dicho fluido se efectuaban las oscilaciones acústicas (*Baryon acoustic oscillations*, BAO 1.5), con la presión de los fotones proporcionando la fuerza de restauración. Después de que el Universo se recombinara, los bariones y la radiación se desacoplaron, y la radiación pudo viajar libremente por todo el Universo. En ese momento las fases de las oscilaciones se congelaron y se proyectaron en el cielo como una serie armónica de picos. El pico principal es el modo que alcanzó la máxima compresión. Los picos pares son las infradensidades máximas, que suelen ser de menor amplitud porque el rebote tiene que luchar contra la inercia de los bariones. Los valles, que no se extienden hasta la potencia cero, están parcialmente llenos porque se encuentran en los máximos de velocidad. Estos picos acústicos eran una clara predicción teórica que se remonta a aproximadamente 1970, que posteriormente se corroboró su existencia empírica alrededor de 1994.

Y finalmente se tiene, **la cola de amortiguación**, debido a que el proceso de recombinación no es instantáneo, dando un espesor a la última superficie de dispersión. Esto conduce a una amortiguación de las anisotropías en l más altos, correspondientes a esca-

las menores que la subtendida por este espesor. También se puede pensar que el fluido fotón-barión tiene un acoplamiento imperfecto, de modo que hay difusión entre los dos componentes, y las oscilaciones tienen amplitudes que disminuyen con el tiempo. Estos efectos conducen a una amortiguación de Silk, que corta las anisotropías en múltiplos por encima de unos $\ell \approx 2000$.

Todos estos procesos explicados anteriormente están fuertemente correlacionados con la cantidad de materia, energía oscura, curvatura y otras características... Por esta razón diferentes cantidades afecta a las anisotropías y al espectro angular de potencias.

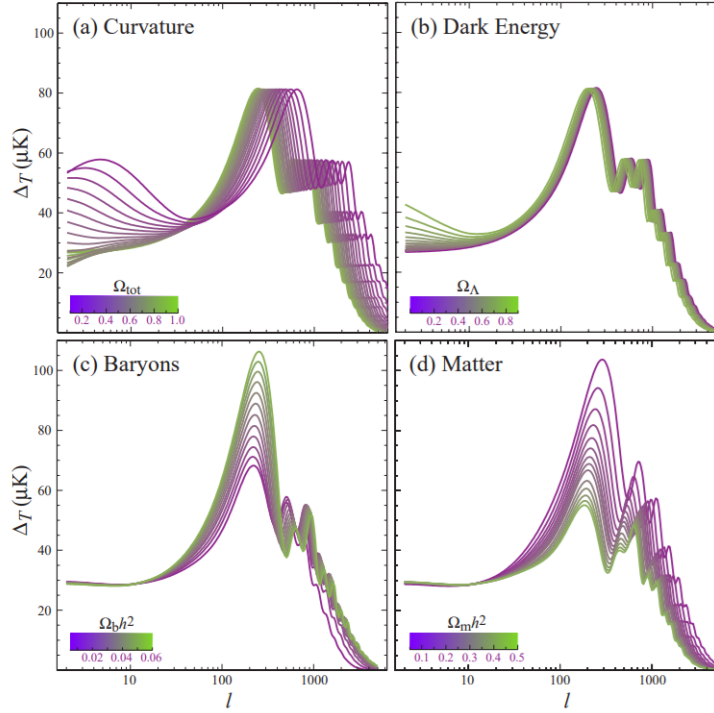


Figura 1.5: Representación de la variación de espectro angular de potencias al modificar cuatro parámetros cosmológicos. [18]

La intensidad y posición relativa de los picos acústicos depende de la densidad de bariones debido a que un aumento en el parámetro de densidad de bariones ocasiona los siguientes efectos: desplazando los picos acústicos, aumenta la amplitud de las oscilaciones. Con la altura del primer pico y la ubicación del segundo pico relativo al primero dependen de los parámetros Ω_m , Ω_b y H_0 , si se combina estas medidas con la posición del primer pico, es posible determinar los parámetros a partir de las medidas de los picos acústicos de la radiación de fondo cósmico.

En realidad, cada una de las posiciones y alturas de los picos no dependen solamente de un solo parámetro, sino que tiene una dependencia aun más complejas. No obstante, hay parámetros cosmológicos en las que el CMB no es buen instrumento, como se puede observar en la figura 1.5 en la densidad de energía oscura Ω_Λ . Al variar la cantidad energía oscura, el CMB permanece casi invariable.

1.4.2. Espectro angular de polarización del CMB

Además de poder analizar la temperatura de los fotones del CMB, otra característica que se puede estudiar es la polarización. Las propiedades de polarización del CMB pueden entenderse mejor utilizando el formalismo de los parámetros de Stokes [8]. Consideremos una onda electromagnética casi monocromática que se propaga en la dirección x , con las componentes z e y del campo eléctrico dadas por:

$$E_z = a_z(t) \cos [w_o t - \theta_z(t)]$$

$$E_y = a_y(t) \cos [w_o t - \theta_y(t)], \quad (1.20)$$

El fenómeno que da lugar al proceso de polarización del CMB es la dispersión Thomson producto de la dispersión de manera elástica de radiación electromagnética por la interacción con una partícula cargada libre. En primera instancia, se considera la onda que interacciona con un electrón libre **(a)**, la resultante es una onda polarizada que se propaga en la dirección z con componente y . Ahora si se consideran dos ondas de la misma intensidad pero que se propagan cada una en un eje diferente, por ejemplo x e y **(b)**, la resultante es una onda no polarizada de la misma intensidad que se propaga en la dirección z . Por otra parte, si la intensidad de las ondas son diferentes el producto obtenido es una onda polarizada **(c)**, este caso sucede cuando convergen sobre el mismo electrón libre dos ondas de zonas diferentes (zonas frías y calientes).

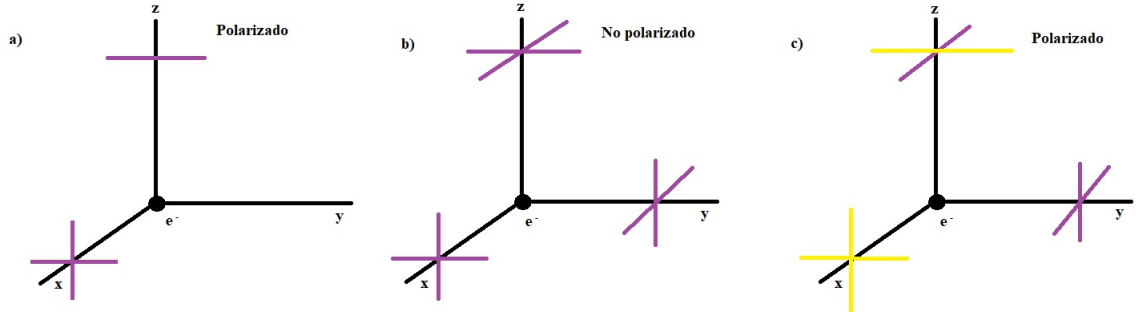


Figura 1.6: Representación del scattering de Thomson en diferentes situaciones. (a) Onda no polarizada interacciona con electrón obteniendo como resultante una onda polarizada. (b) Dos ondas no polarizadas de la misma intensidad interaccionan con un electrón y la resultante es una onda no polarizada. (c) Dos ondas no polarizadas de diferente intensidad interaccionan con un electrón obteniendo una onda polarizada.

Entonces, los parámetros de Stokes se definen por:

$$I = \langle a_x^2 \rangle + \langle a_y^2 \rangle, \quad (1.21)$$

$$Q = \langle a_x^2 \rangle - \langle a_y^2 \rangle, \quad (1.22)$$

$$U = \langle 2a_x a_y \cos(\theta_x - \theta_y) \rangle, \quad (1.23)$$

$$V = \langle 2a_x a_y \sin(\theta_x - \theta_y) \rangle, \quad (1.24)$$

donde los paréntesis representan el promedio sobre un tiempo mucho mayor que el periodo de la onda. La interpretación física de los parámetros de Stokes es sencilla. El parámetro I es simplemente la intensidad media de la radiación. Las propiedades de polarización de la onda se describen mediante los parámetros restantes: Q y U describen la polarización lineal, mientras que V describe la polarización circular. La radiación no polarizada (o luz natural) se caracteriza por tener $Q = U = V = 0$. La polarización del CMB se produce a través de la dispersión Thomson que, por simetría, no puede generar polarización circular. Entonces, $V = 0$ siempre para la polarización CMB.

Los parámetros I y V son observables físicos independientes del sistema de coordenadas, pero Q y U dependen de la orientación de los ejes x e y [31]. Si una onda dada se describe mediante los parámetros Q y U para una determinada orientación del sistema de coordenadas, después de una rotación del plano x e y a través de un ángulo, la misma onda se puede describir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Q' &= Q \cos(2\psi) + U \sin(2\psi) \\ U' &= -Q \sin(2\psi) + U \cos(2\psi) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Lo que significa que se puede construir dos cantidades a partir de los parámetros de Stokes Q y U que tienen un valor definido de espín:

$$(Q' \pm iU')(\hat{\mathbf{n}}) = e^{\mp 2i\psi} (Q \pm iU)(\hat{\mathbf{n}}) \quad (1.26)$$

Estas cantidades son conjuntos análogos que verifican la misma propiedad ortogonal de los armónicos esféricos. Por lo tanto, se puede expandir cada una de las cantidades en la base de spin-2 apropiada:

$$\begin{aligned} (Q \pm iU)(\hat{\mathbf{n}}) &= \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^{(2)} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) \\ (Q \mp iU)(\hat{\mathbf{n}}) &= \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^{(-2)} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Q y U están definidos en una dirección $\hat{\mathbf{n}}$ con respecto al sistema de coordenadas esféricas.

La principal dificultad a la hora de calcular el espectro de potencia de la polarización es que los parámetros de Stokes no son invariantes bajo rotaciones en el plano perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$. Mientras que Q y U se calculan en un sistema de coordenadas donde el vector de onda k es paralelo a $\hat{\mathbf{z}}$, la superposición de los diferentes modos se complica por el comportamiento de Q y U bajo rotaciones 1.25. Para cada vector de onda k y dirección en el cielo $\hat{\mathbf{n}}$, hay que rotar los parámetros Q y U desde la base dependiente de k y $\hat{\mathbf{n}}$ a una base fija en el cielo (sólo en el límite de pequeña escala este proceso está bien definido). Por

lo tanto, se pueden utilizar los operadores de ∂ y ∂^* , que sirven para obtener cantidades de espín cero:

$$\begin{aligned}
(\partial^*)^2(Q \pm iU)(\hat{\mathbf{n}}) &= \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{\ell=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^{(2)} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) \\
\partial^2(Q \mp iU)(\hat{\mathbf{n}}) &= \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{\ell=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^{(-2)} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}),
\end{aligned} \tag{1.28}$$

donde las expresiones de los coeficientes de expansión son:

$$\begin{aligned}
a_{\ell m}^2 &= \left[\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \right]^{-1/2} \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) \partial^{*2}(Q + iU)(\hat{\mathbf{n}}) \\
a_{\ell m}^{-2} &= \left[\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \right]^{-1/2} \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) \partial^2(Q - iU)(\hat{\mathbf{n}}).
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Para $a_{\ell m}^{-2}$ y $a_{\ell m}^2$ conviene introducir sus combinaciones lineales [13] :

$$\begin{aligned}
a_{\ell m}^B &= \frac{i(a_{\ell m}^2 - a_{\ell m}^{-2})}{2} \\
a_{\ell m}^E &= \frac{(a_{\ell m}^2 + a_{\ell m}^{-2})}{2}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Con las expresiones anteriores, se puede introducir cantidades escalares:

$$E(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{2}[(\partial^*)^2(Q - iU) + \partial^2(Q - iU)] = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{\ell=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^E \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \tag{1.31}$$

$$B(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{i}{2}[(\partial^*)^2(Q - iU) - \partial^2(Q - iU)] = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{\ell=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^B \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \tag{1.32}$$

De esta forma se puede dividir en dos componentes E y B (denominados así por el campo eléctrico y magnético respectivamente). Estos modos son independientes del sistema de coordenadas y se relacionan con los parámetros de Stokes Q y U mediante una transformación no local:

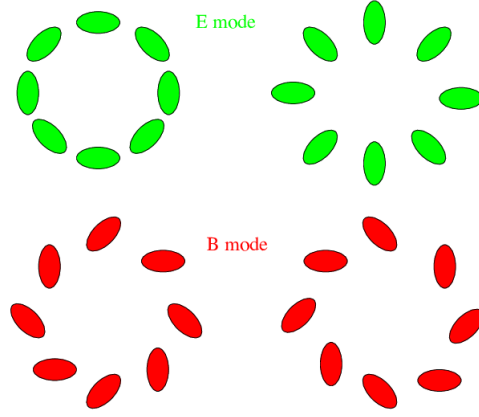


Figura 1.7: Ejemplo representativo de patrones de los modos E y B. [17]

Para caracterizar las perturbaciones de polarización del CMB se necesitan los mapas del cielo completo y tres espectros angulares de potencias E , B y la correlación cruzada entre $T - E$, debido a que B tiene paridad opuesta a E y T las correlaciones entre T-B y E-B desaparecen [31]:

$$C_{\ell}^{EE} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}^E|^2 \quad (1.33)$$

$$C_{\ell}^{BB} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}^B|^2 \quad (1.34)$$

$$C_{\ell}^{TE} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \langle a_{\ell m}^{*T} a_{\ell m}^E \rangle \quad (1.35)$$

De esta manera se tiene los espectros de potencias de las diferentes polarizaciones, además de la correlación con la temperatura del CMB.

1.5. Oscilaciones acústicas de bariones (BAO)

Las oscilaciones acústicas de bariones (BAO) son un patrón de arrugas en la distribución de la densidad de los cúmulos de galaxias repartidos por el Universo. Son un efecto sutil pero importante porque proporcionan una forma independiente de medir las propiedades del Universo y cómo esa tasa ha cambiado a lo largo de la historia cósmica.

Las oscilaciones acústicas de los bariones están impresas en la materia del Universo primitivo. Cuando el Universo estaba en su infancia, la materia estaba dispersa en un mar casi uniforme de partículas, y la gravedad intentaba juntar la materia para formar galaxias.

No fue un proceso sencillo porque la materia se calentó al juntarse por la gravedad. Esto creó una presión hacia el exterior que volvió a separar la materia. Sin embargo, al expandirse, se enfriaba y la gravedad empezaba a juntarla de nuevo. Esta interacción de la gravedad y la presión creó una oscilación que generó el equivalente a las ondas sonoras,

que se propagan a una velocidad c_s . Éstas se propagan hacia el exterior en forma de burbujas, arrastrando en la cáscara de la burbuja parte de la materia.

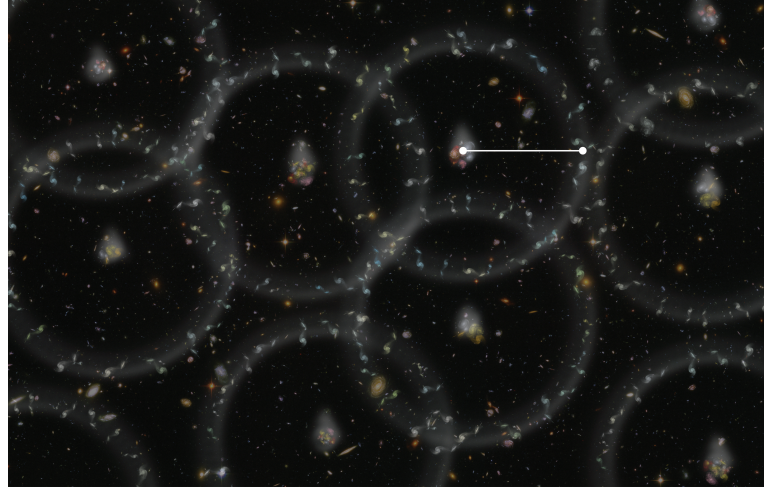


Figura 1.8: Representación de la oscilación acústica de bariones [6].

Cuando el Universo alcanzó una edad de unos 400.000 años aproximadamente, se formaron átomos por primera vez. Esto permitió que la materia se enfriara de forma más eficiente y se detuviera la interacción de ondas sonoras. Como la velocidad de estas oscilaciones es finita, origina el horizonte de sonido r_s . Luego la gravedad comenzó a dominar, con poco ya para oponerse a la gravedad, empezaron a formarse estructuras a gran escala y en ellas quedaron impresas las burbujas de materia creadas por las ondas acústicas. Estas burbujas son las arrugas visibles hoy en día como las oscilaciones acústicas de los bariones.

La detección de las oscilaciones es tan útil para los cosmólogos porque su tamaño está determinado por las propiedades del Universo primitivo y sus componentes: la materia normal (bariónica), la materia oscura y la energía oscura. Por tanto, pueden utilizarse para restringir las propiedades de estos componentes.

Además, la forma en que las BAOs cambia a través del tiempo cósmico puede utilizarse para medir la expansión del Universo y la forma en que este evoluciona.

Las BAOs se detectó por primera vez en 2005. Dos equipos de astrónomos que trabajaban de forma independiente encontraron la señal en sus estudios de galaxias relativamente cercanas. El Sloan Digital Sky Survey [7], en Nuevo México (Estados Unidos), y el 2dF Galaxy Redshift Survey [9], en Australia, hicieron el descubrimiento.

Como se puede observar, en esta sección y en la sección donde se describe las diferentes partes del espectro angular se discute acerca de las oscilaciones acústicas de bariones. Esta relación que hay entre ambos métodos es debido a que los dos vienen de un mismo fenómeno. La diferencia es que se analiza diferentes partes del fenómeno. Por un lado, cuando se analiza el espectro angular de potencias se utiliza los fotones que llegan del CMB. Mientras que en los BAOs, se analiza la distribución espacial de materia ya que debido a las oscilaciones producidas, se han formado galaxias no solo en el interior de la burbuja, si no también en la cascara de la misma. Por lo que analizando las distribución de galaxias se logra obtener las manifestaciones de las oscilaciones acústicas de bariones.

Capítulo 2

Datos

Para el análisis de las perturbaciones del fondo cósmico de microondas, se precisan datos de las variaciones de temperatura de dicho fondo cósmico. Por lo que en este trabajo se utilizó los datos de *Planck* 2018 [26] [25] y los datos de BAOs de las misiones citadas anteriormente [9] [28] [7].

Planck es una misión de la Agencia Espacial Europea (ESA) con una importante participación de la NASA en el hardware y la ciencia, gestionada por the Jet Propulsion Laboratory, Instituto tecnológico de California. Los productos de datos de *Planck* son proporcionados por el Consorcio *Planck*. Los productos son publicados por la ESA a través del archivo en ESAC y por la NASA.

La misión *Planck* es la tercera generación de experimentos de fondo cósmico de microondas basados en el espacio, después del Explorador de Fondo Cósmico (COBE) y la Sonda de Anisotropía de Microondas Wilkinson (WMAP) de la NASA. También es la tercera misión de tamaño medio del programa científico Horizonte 2000 de la Agencia Espacial Europea (ESA). El objetivo científico básico de la misión Planck es medir las anisotropías del CMB en todas las escalas angulares mayores de 10 minutos de arco en todo el cielo con una precisión de 2 partes por millón.

Los datos que se utilizan se publicaron en julio de 2018 (su lanzamiento fue en mayo de 2009 y las primeras observaciones se dieron mucho antes, desde que el satélite *Planck* se lanzó). En ese instante, los científicos de todo el mundo se pusieron a extraer la máxima información de los datos obtenidos, logrando tener más precisión en los parámetros extraídos anteriormente en las anteriores expediciones (COBE, WMAP).

La misión *Planck* es de gran importancia debido a que es la primera misión europea, además de que logrará un valor más detallado de todas las características que engloban el CMB, sea la temperatura, densidad de bariones, densidad de energía oscura, profundidad óptica.

En lo que respecta a los parámetros que se van analizar son los siguientes:

$$\{\Omega_b h^2, \Omega_c h^2, n_s, \Omega_m, H_0, \tau_{reio}, 100\theta_{MC}, \ln(10^{10} A_s)\}$$

Donde $\Omega_b h^2$ es la densidad de bariones, $\Omega_c h^2$ la densidad de materia oscura, n_s es el índice espectral escalar, τ es la profundidad óptica, Ω_m la densidad de materia, H_0 la parámetro de Hubble, $100\theta_{MC}$ el tamaño angular del horizonte de sonido y $\ln(10^{10} A_s)$ neperiano de la amplitud del espectro de potencia de las perturbaciones de curvatura.

Se han seleccionado los parámetros más relevantes para su análisis ya que se utilizará el modelo de Concordancia.

Capítulo 3

Metodología

La finalidad de este trabajo de investigación es estimar el valor de determinados parámetros. Para ello, se ha utilizado los programas CAMB y COBAYA para el tratamiento de los datos y su posterior análisis, además se ha utilizado HEALPix para el tratamiento de imágenes. Posteriormente, se ha detallado el método computacional que se ha utilizado. En esta sección se presentará ambos programas, ya que han sido de gran utilidad, y además se ha indicado como proceder a su instalación en el apéndice A.

3.1. Interferencia Bayesiana en la cosmología

Los análisis científicos suelen basarse en la realización de inferencias sobre los modelos físicos subyacentes a partir de diversas fuentes de datos observacionales. En las últimas décadas, la calidad y la cantidad de estos datos han aumentado considerablemente, ya que su recogida y almacenamiento son más rápidos y baratos. Al mismo tiempo, la misma tecnología que ha hecho posible la obtención de datos también ha llevado a un aumento sustancial de la potencia de cálculo y los recursos disponibles para analizarlos.

En conjunto, estos cambios han hecho posible la exploración de modelos cada vez más complejos utilizando métodos que pueden explotar estos recursos informáticos. Esto ha provocado un aumento espectacular de trabajos publicados que se basan en los métodos de *Monte Carlo*, que recurren a combinación de simulación numérica y generación de números aleatorios para explorar estos modelos.

Un subconjunto especialmente popular de los métodos de *Monte Carlo* se conoce como *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC). Los métodos MCMC son atractivos porque se pueden utilizar en casi cualquier caso, son casi universales. Eso es debido a que a partir de una distribución desconocida y utilizando datos para realizar análisis posteriores se puede obtener resultados de gran precisión.

En muchas aplicaciones científicas, se tiene acceso a algunos datos D que se quiere utilizar para hacer inferencias sobre el mundo exterior. Lo más frecuente es que se quiera interpretar estos datos a la luz de un modelo subyacente M que puede hacer predicciones sobre los datos que se espera ver como una función de algunos parámetros θ de ese modelo en particular.

Se puede combinar estas piezas para estimar la probabilidad $P(D|\theta, M)$ de que realmente se observe los datos D que se recogieron condicionados (es decir, asumiendo) una

elección específica de los parámetros θ del modelo M . En otras palabras, suponiendo que el modelo M es correcto y los parámetros θ describen los datos, ¿cuál es la probabilidad $P(D|\theta, M)$ de los parámetros θ basada en los datos observados D ? Suponiendo que diferentes valores de θ diferentes verosimilitudes (del inglés **likelihood**), lo que nos indica qué opciones de parámetros parecen describir mejor los datos que se observan [16].

En la inferencia bayesiana [11], interesa deducir la cantidad invertida, $P(\theta|D, M)$. Esto describe la probabilidad de que los parámetros subyacentes sean realmente θ dados los datos D y asumiendo un modelo particular M . Utilizando la factorización de la probabilidad, se puede relacionar esta nueva probabilidad $P(\theta|D, M)$ con la probabilidad $p(D|\theta, M)$ descrita anteriormente como:

$$P(\theta|D, M)P(D|M) = P(\theta, D|M) = P(D|\theta, M)P(\theta|M) \quad (3.1)$$

Donde $P(\theta, D|M)$ representa la probabilidad conjunta de tener un conjunto subyacente de parámetros θ que describen los datos y de observar el conjunto particular de datos D que hemos se han recogido.

Reorganizando esta igualdad en una forma más conveniente, obtenemos el Teorema de Bayes:

$$P(\theta|D, M) = \frac{P(D|\theta, M)P(\theta|M)}{P(D|M)} \quad (3.2)$$

Esta ecuación describe ahora exactamente cómo se relacionan las dos probabilidades.

$P(\theta|M)$ suele denominarse **prior**, la cual describe la probabilidad de tener un conjunto particular de valores θ para el modelo dado M antes de condicionar a los datos. Como es independiente de los datos, este término suele interpretarse como una representación de las creencias previas sobre lo que debería ser θ , basadas en mediciones previas, preocupaciones físicas y otros factores conocidos. En la práctica, esto tiene el efecto de aumentar los datos con otra información.

El denominador

$$P(D|M) = \int P(D|\theta, M)P(\theta|M)d\theta \quad (3.3)$$

se conoce como la probabilidad marginal (o **evidencia**) para nuestro modelo M marginado (es decir, integrado) sobre todos los posibles valores de los parámetros θ . Esto trata de cuantificar, en líneas generales, lo bien que el modelo M explica los datos D después de promediar sobre todos los posibles valores θ de los verdaderos parámetros subyacentes. En otras palabras, si las observaciones predichas por nuestro modelo son similares a los datos D , entonces M es un buen modelo.

Por último, $P(\theta|D, M)$ se denomina **posterior**. Cuantifica la creencia en θ después de combinar la intuición previa $P(\theta|M)$ con las observaciones actuales $P(D|\theta, M)$ y normalizando por la evidencia global $p(D|M)$. La función posterior será un compromiso entre la probabilidad y la intuición previa, y la combinación exacta dependerá de la fuerza y las propiedades de la prioridad y de la calidad de los datos utilizados para derivar la probabilidad.

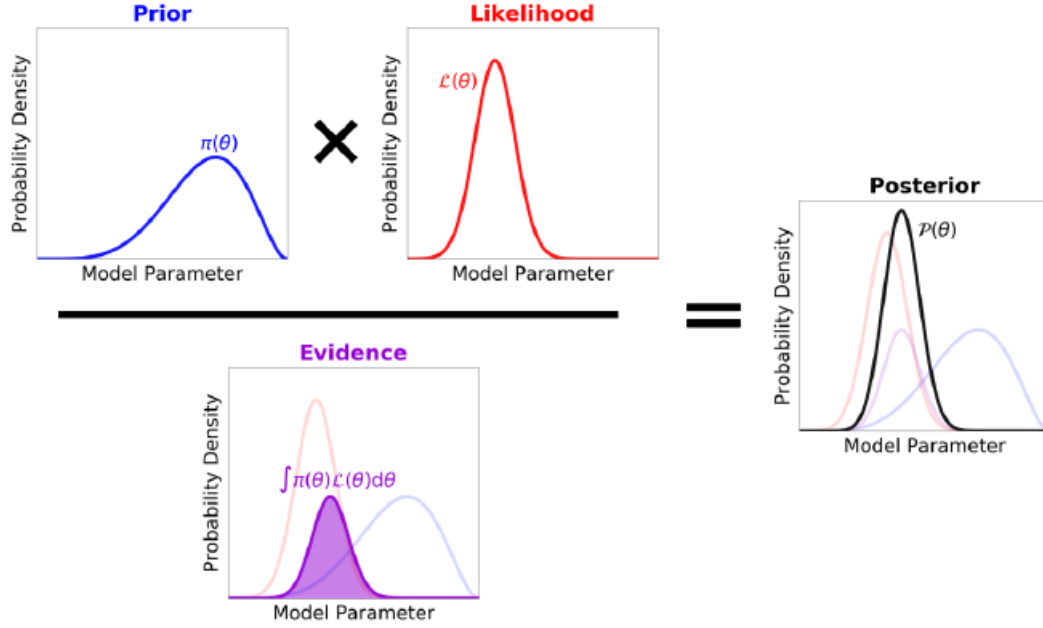


Figura 3.1: Una ilustración del Teorema de Bayes. La probabilidad posterior $P(\theta)$ (negro) de los parámetros del modelo θ se basa en una combinación de las creencias previas $\pi(\theta)$ (azul) y la likelihood $\mathcal{L}(\theta)$ (rojo), normalizada por la evidencia global $\int \pi(\theta)\mathcal{L}(\theta)d\theta$ (púrpura) para el modelo particular.[29]

3.1.1. Prior

Los priores utilizados en el trabajo son distribuciones gaussianas y uniformes. En la tabla 3.1 se muestran los priores utilizados

$\ln A_s$	n_s	H_0	Ω_m
$\mathcal{N}(3.05, 0.001)$	$\mathcal{N}(0.965, 0.004)$	$\mathcal{U}(20, 80)$	Derivado
$\Omega_b h^2$	$\Omega_c h^2$	τ_{reio}	$100\theta_{MC}$
$\mathcal{N}(0.0224, 0.0001)$	$\mathcal{N}(0.12, 0.001)$	$\mathcal{N}(0.055, 0.006)$	$\mathcal{N}(1.04109, 0.0004)$

Tabla 3.1: Priores utilizados para los datos. La distribución uniforme está representada por $\mathcal{U}(a, b)$ donde a y b son los valores mínimo y máximo del intervalo. La distribución gaussiana está representada por $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ donde μ es la media y σ^2 es la varianza.

El parámetro derivado, que corresponde con la densidad de materia Ω_m , se extrae mediante la suma de la densidad de bariones Ω_b y la densidad de materia oscura Ω_c , $\Omega_m = \Omega_c + \Omega_b$

3.1.2. Likelihood

Para determinar los parámetros cosmológicos de la misma forma que la misión Planck, se utilizó las mismas funciones [4] [26]:

- `planck_2018_lowl.TT` : la likelihood ha sido creada usando los datos de temperatura en un rango de $2 \leq l \leq 30$.
- `planck_2018_lowl.EE` : likelihood formada usando la polarización E en un rango de $2 \leq l \leq 30$.
- `planck_2018_highl_plik.TTTTTEEE` (plikHM): se utilizó la combinación de las likelihood de Planck TT, EE, TE en un rango $30 \leq l \leq 2500$.
- `planck_2018_lensing.clik`: likelihood con datos la probabilidad de lente, utilizando la reconstrucción de lente basada en el mapa de polarización y temperatura.

Para la sección 4.2, se utilizó las mismas funciones anteriores más las likelihoods de BAO [9] [28] [7]:

- `bao.sixdf.2011_bao`: likelihood con los datos de BAO en el 6dF Galaxy Survey.
- `bao.sdss_dr7_mgs`: likelihood de los datos de la escala BAO de la muestra principal de galaxias del SDSS DR7.
- `bao.sdss_dr12_consensus_bao`: likelihood del espectro de potencia BAO de SDSS DR12.

3.1.3. Método Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

El método MCMC trata de generar muestras proporcionales a la posterior $p(\theta)$ para llegar a una estimación óptima de los valores que se analizan.

El algoritmo MCMC más general y conocido es el de Metrópolis-Hastings [27]. La idea central es que se quiere una forma de generar nuevas muestras $\theta_n \rightarrow \theta_{n+1}$ tal que la distribución de las muestras finales $p(\theta)$ a medida que $n \rightarrow \infty$ (1) sea estacionaria (es decir, que converja a algo) y (2) sea igual al posterior $P(\theta)$.

La primera condición se puede satisfacer invocando al principio de equilibrio detallado. Dicho equilibrio trata de la idea de que la probabilidad se conserva al pasar de una posición a otra (es decir, el proceso es reversible). Más formalmente, esto se reduce a la factorización de la probabilidad:

$$P(\theta_{n+1}|\theta_n)P(\theta_n) = P(\theta_{n+1}, \theta_n) = P(\theta_n|\theta_{n+1})P(\theta_{n+1}) \quad (3.4)$$

Donde $P(\theta_{n+1}|\theta_n)$ es la probabilidad de moverse de $\theta_n \rightarrow \theta_{n+1}$ y $P(\theta_n|\theta_{n+1})$ es la probabilidad revertida, es decir, la probabilidad de moverse de $\theta_{n+1} \rightarrow \theta_n$. Reorganizando la expresión anterior, se obtiene:

$$\frac{P(\theta_{n+1}|\theta_n)}{P(\theta_n|\theta_{n+1})} = \frac{P(\theta_{n+1})}{P(\theta_n)} \quad (3.5)$$

donde la igualdad final proviene del hecho de que la distribución de la que se intenta generar muestras es la posterior $P(\theta)$.

Ahora se requiere implementar un procedimiento que permita realmente moverse a nuevas posiciones calculado dicha probabilidad. Este movimiento se puede fragmentar en

dos pasos. Primero, se quiere proponer una nueva posición $\theta_n \rightarrow \theta'_{n+1}$ basada en una distribución propuesta $Q(\theta'_{n+1}|\theta_n)$. De esta manera se decide aceptar ($\theta_{n+1} = \theta'_{n+1}$) una nueva posición o rechazarla ($\theta_{n+1} = \theta_n$) con alguna probabilidad de transición $T(\theta'_{n+1}|\theta_n)$, que determina la probabilidad de que la cadena pase de n a $n+1$ en el espacio de parámetros. Combinando estos términos se obtiene la probabilidad de moverse a otra posición:

$$P(\theta_{n+1}|\theta_i) = Q(\theta_{n+1}|\theta_n)T(\theta'_{n+1}|\theta_n) \quad (3.6)$$

Ahora, se tiene que determinar la probabilidad de transición $T(\theta'_{n+1}|\theta_n)$ de si se debe aceptar o rechazar θ'_{n+1} . Sustituyendo en la expresión 3.6 en la ecuación 3.4 para el equilibrio detallado, se encuentra que la forma para la probabilidad de transición debe satisfacer la siguiente restricción:

$$\frac{T(\theta_{n+1}|\theta_n)}{T(\theta_n|\theta_{n+1})} = \frac{P(\theta_{n+1})Q(\theta_n|\theta_{n+1})}{P(\theta_n)Q(\theta_{n+1}|\theta_n)} \quad (3.7)$$

De esta forma se llega al criterio de Metropolis:

$$T(\theta_{n+1}|\theta_n) = \min \left[1, \frac{P(\theta_{n+1})Q(\theta_n|\theta_{n+1})}{P(\theta_n)Q(\theta_{n+1}|\theta_n)} \right] \quad (3.8)$$

Por lo tanto, el algoritmo Metropolis-Hastings se puede resumir de la siguiente manera:

1. Proponer una nueva posición $\theta_n \rightarrow \theta'_{n+1}$ generando una muestra de la distribución propuesta $Q(\theta'_{n+1}|\theta_n)$
2. Calcular la probabilidad de transición $T(\theta_{n+1}|\theta_n) = \min \left[1, \frac{P(\theta_{n+1})Q(\theta_n|\theta_{n+1})}{P(\theta_n)Q(\theta_{n+1}|\theta_n)} \right]$
3. Generar un número aleatorio R_{n+1}
4. Si $R_{n+1} \leq T(\theta'_{n+1}|\theta_n)$, se acepta el movimiento y $\theta_{n+1} = \theta'_{n+1}$. Si $R_{n+1} \geq T(\theta'_{n+1}|\theta_n)$ se rechaza el movimiento y se tiene $\theta_{n+1} = \theta_n$
5. Se incrementa $n = n+1$ y se repite el proceso.

En este proyecto, se utilizó COBAYA [30] que es un código para el análisis bayesiano que permite analizar el posterior utilizando muestreadores de Monte Carlo. El muestreador MCMC utilizado en Cobaya es de CosmoMC [21], que llama al código CAMB para el cálculo de la verosimilitud. Este código utiliza una versión generalizada de R-1 Gelman-Rubin para comprobar la convergencia. En general, el parámetro R-1 se ha fijado en un valor de 0.05, pero en ciertas situaciones en las que la convergencia es difícil de lograr, se fijó en 0.075.

Para analizar las muestras se ha utilizado un paquete de Python llamado GetDist [20]. Este programa permite calcular cantidades de interés a partir de las muestras, como medias de los parámetros intervalos creíbles y densidades marginalizadas. Mediante GetDist se obtienen gráficos de contorno 2D que contienen el 68 % y el 95 % de las muestras, que nos ayudan a estudiar las degeneraciones entre parámetros.

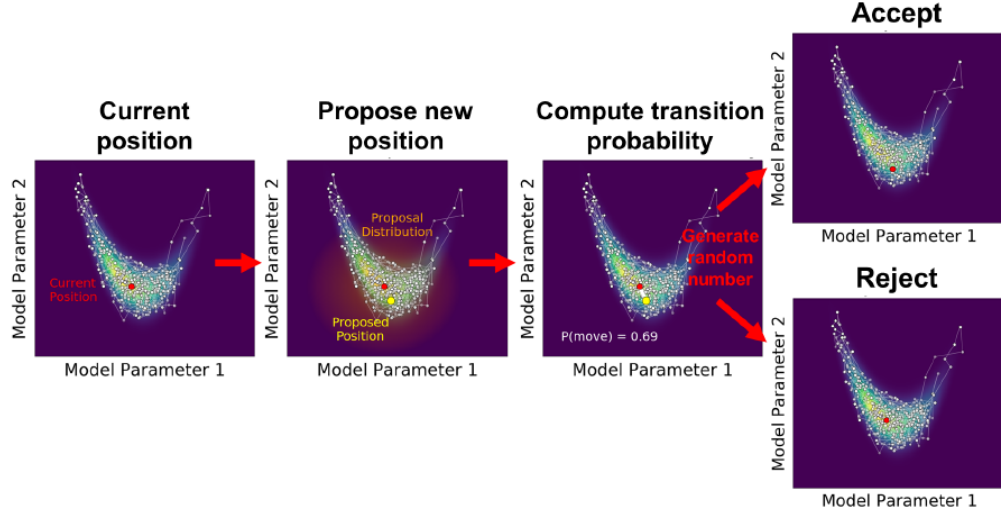


Figura 3.2: Esquema del funcionamiento del algoritmo Metropolis-Hastings. En la iteración n , se genera una cadenas de muestras (blanco) hasta la posición en la que se haya (rojo). Se propone una nueva posición (amarilla) de la distribución propuesta (sombra naranja). Entonces se calcula la probabilidad de transición (línea blanca) basada en el posterior y la densidad propuesta. De esta manera se genera un número aleatorio y se analiza si es aceptado o rechazado. .[29]

3.2. HEALPix

El cálculo numérico en una esfera, se requiere un método que posibilite distribuirla en secciones, de esta forma asignar a cada una de las fracciones un punto que las represente y un coeficiente toma en cuenta el valor medio de los armónicos esféricos en las secciones.

Para conseguir el objetivo propuesto se utilizará HEALPix [14] (Hierarchical, Equal Area, and iso-Latitude Pixelation of the sphere), esta pixelización 3.3 produce una subdivisión de una superficie esférica en la que cada píxel cubre la misma superficie que todos los demás píxeles con un nivel de resolución que se necesite.

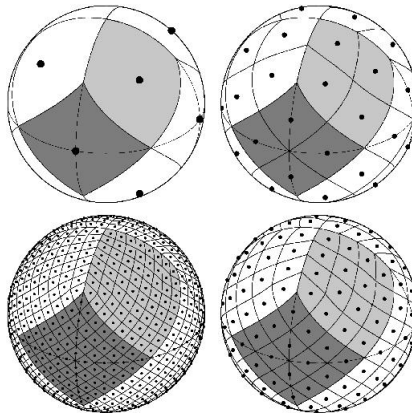


Figura 3.3: Diferentes resoluciones de HEALPix.

Una de sus características es la obtención de un mapa de temperaturas, de esta forma

se puede adquirir espectros de potencias o el mapa de anisotropías de una imagen de temperaturas del CMB [4].

3.3. Camb

CAMB, de las siglas Code for Anisotropies in the Microwave Background, es un programa informático desarrollado por Anthony Challinor y Antony Lewis.

CAMB es un código de cosmología para resolver las ecuaciones de Boltzmann de las anisotropías, calcular observables cosmológicos, incluyendo CMB, lentes, conteo de fuentes y espectros de potencia angular, espectros de potencia de la materia, funciones de transferencia y la evolución del fondo. El código está en Python y Fortran. En este trabajo se utilizará el código de Python.

Además alberga toda la física del modelo cosmológico estándar, de esta forma se puede obtener espectros de potencias con diferentes valores de los parámetros.

3.4. Cobaya

COBAYA [30] (código para el análisis bayesiano) es un código que trabaja en el muestreo y el modelado estadístico: permite explorar una función *prior* o *posterior* arbitrario utilizando una gama de muestreadores de Monte Carlo incluyendo el muestreo MCMC.

Sus autores son Jesús Torrado y Antony Lewis. Algunas ideas y piezas de código han sido adaptadas de otros códigos (por ejemplo CosmoMC de Antony Lewis y colaboradores, y Monte Python, de J. Lesgourgues y B. Audren) .

Cobaya ha sido concebido desde el principio para ser altamente y sin esfuerzo extensible para definir tus propios *prior* y *likelihood*, crear nuevos parámetros como funciones de otros parámetros.

Aunque Cobaya es un marco estadístico de propósito general, incluye interfaces para códigos de teoría cosmológica (CAMB y CLASS) y verosimilitudes de experimentos cosmológicos. Se incluyen instaladores automáticos para todos esos módulos externos. También se puede utilizar cobaya simplemente como una envoltura para los modelos cosmológicos y verosimilitudes, e integrarlo en su propio muestreo.

Uno de los propósitos es conocer y entender el funcionamiento del muestreador MCMC en el programa COBAYA. La interfaz que se utilizó en el trabajo es CAMB, ya que en un principio se utilizó para obtener los espectros de potencias y se está más familiarizado con ello.



Capítulo 4

Resultados y análisis

En esta sección se mostrará y analizará los resultados obtenidos utilizando la metodología descrita anteriormente. Se seguirá las definiciones y notaciones de los documentos de la colaboración de *Planck* 2018.

La suposición de la cual se va a partir es el modelo de Concordancia con perturbaciones primordiales escalares puramente adiabáticas con un espectro de ley de potencias. Además, se asume tres especies de neutrinos, dos estados sin masa y un único neutrino masivo de masa $m = 0.06$ eV.

4.1. Ajuste de los parámetros con los datos de la misión *Planck*

Para el análisis de los parámetros cosmológicos se utilizó los datos de la temperatura, polarización y de lentes, a dichos parámetros cosmológicos se les denominará "Mi_TTTEEE_lowl_lowE_lensing". Los datos fueron descargados mediante COBAYA de la pagina oficial de la misión *Planck* [4], en donde tienen a la disposición del público todos los datos que han utilizado para llevar a cabo la investigación. Por otro lado, los parámetros expuestos en la misión *Planck* se les denominará "plikHM_TTTEEE_lowl_lowE_lensing".

En primer lugar, se presenta el mapa de temperatura del CMB obtenido por esta investigación y la misión *Planck*. La forma en la cual se ha obtenido el mapa de temperatura es descargando el mapa de temperatura de la página oficial de *Planck* y se ha utilizado el paquete HEALPix para la obtención del mapa de temperaturas.

Posteriormente, se presentan los diferentes espectros angulares de temperatura (TT), polarización (EE) y el espectro cruzado de polarización y temperatura (TE). La manera de obtener dichos espectros ha sido la siguiente: (I) se han obtenido los parámetros cosmológicos de la investigación, (II) se han introducido dichos parámetros en el programa CAMB para obtener los espectros angulares de potencias teóricos.

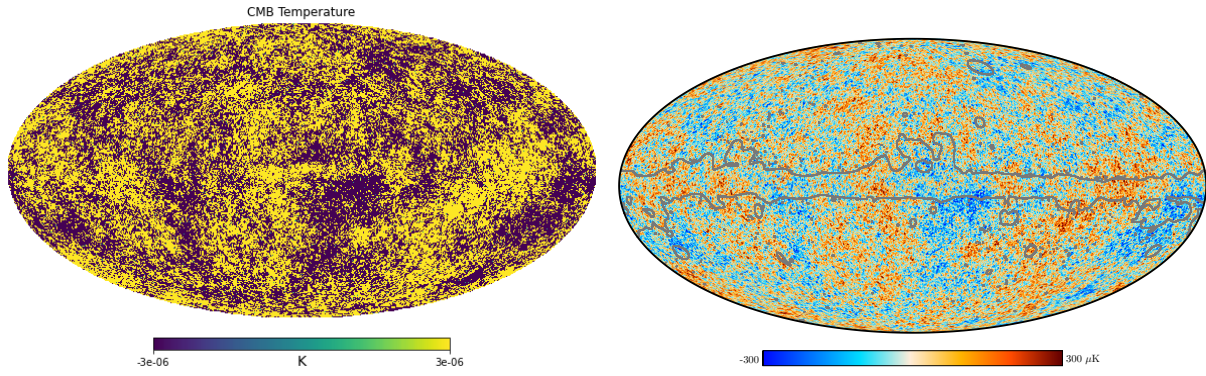


Figura 4.1: A la derecha el mapa de temperaturas del CMB obtenido con la imagen de temperaturas de *Planck* 2018 mediante HEALPix y a la izquierda el mapa de temperaturas mostrado por la misión *Planck* en 2018.

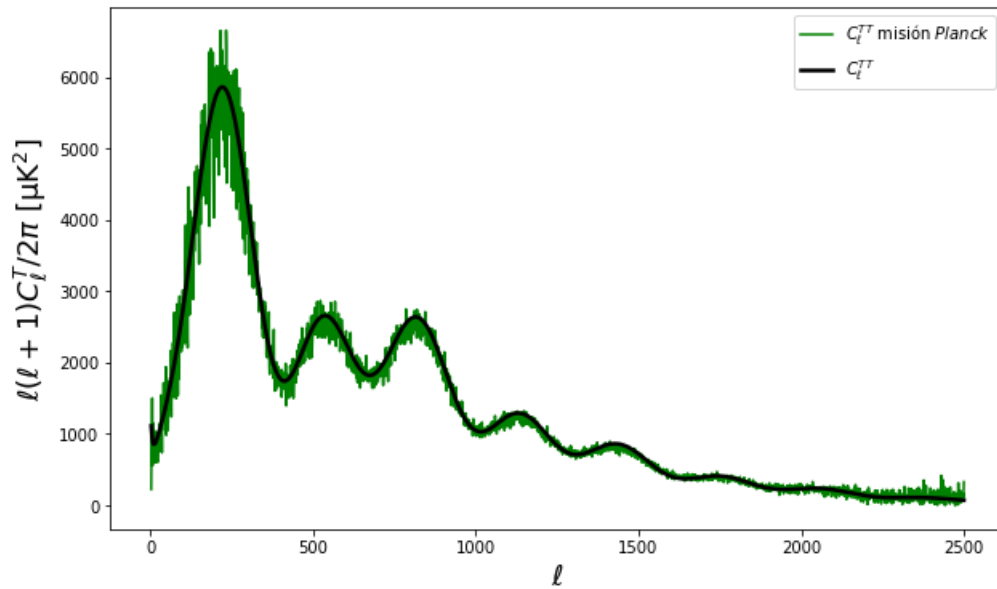


Figura 4.2: Espectro angular de temperatura del CMB (TT) obtenido por la misión *Planck* en verde comparado con el espectro angular de temperatura teórico obtenido mediante CAMB en negro.

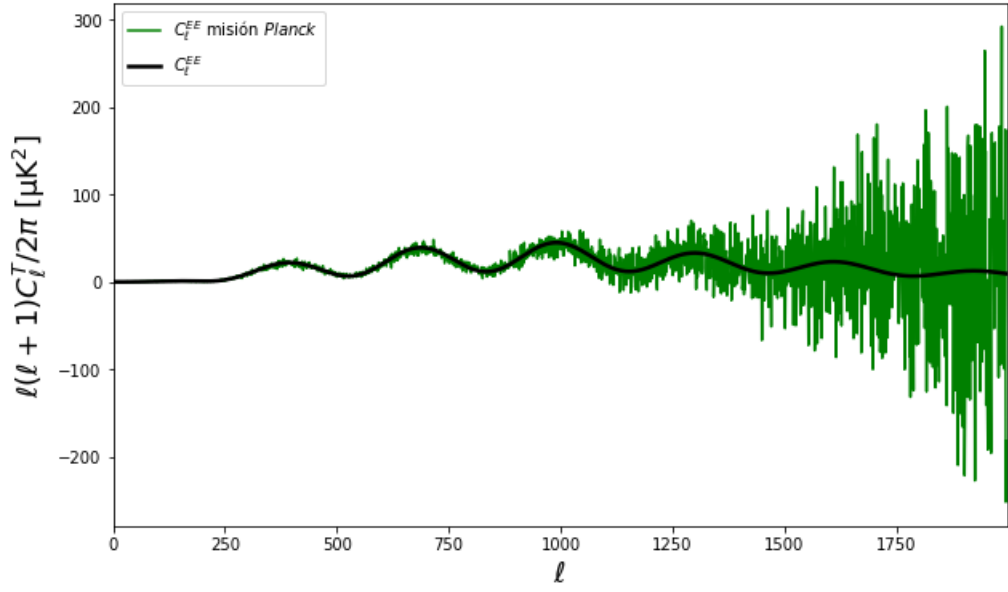


Figura 4.3: Espectro angular de polarización del CMB (EE) obtenido por la misión *Planck* en verde comparado con el espectro angular de polarización teórico obtenido mediante CAMB en negro.

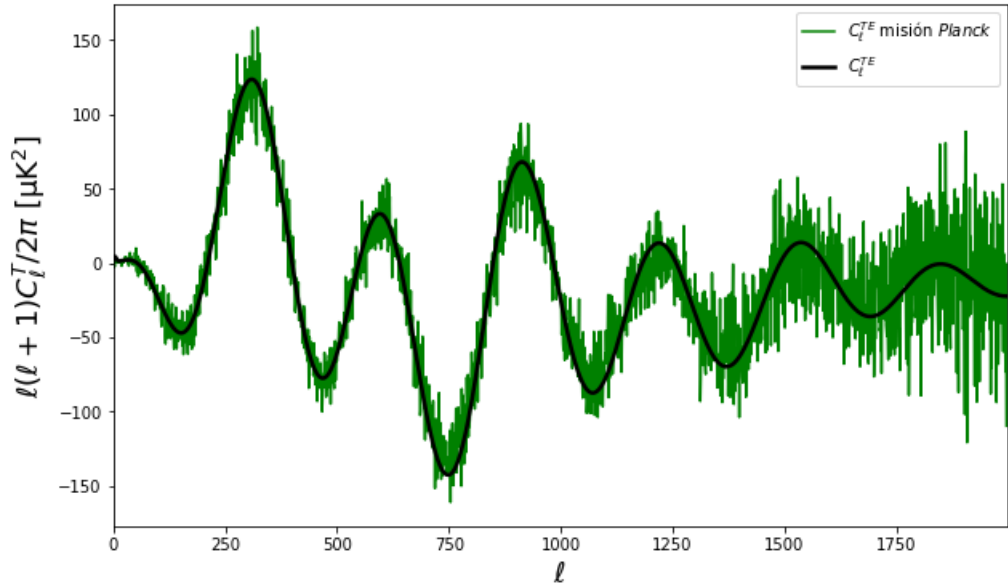


Figura 4.4: Espectro angular cruzado de temperatura y polarización del CMB (TE) obtenido por la misión *Planck* en verde comparado con el espectro angular cruzado teórico obtenido mediante CAMB en negro.

Parámetro	Misión <i>Planck</i>	Ajuste
$\ln(10^{10}A_s)$	3.044 ± 0.014	3.045 ± 0.014
n_s	0.9649 ± 0.0042	0.965 ± 0.004
$\Omega_b h^2$	0.02237 ± 0.00015	0.02238 ± 0.00014
$\Omega_c h^2$	0.1200 ± 0.0012	0.1200 ± 0.0012
τ_{reio}	0.0544 ± 0.0073	0.0544 ± 0.007
H_0	67.36 ± 0.54	67.36 ± 0.53
Ω_m	0.3153 ± 0.0073	0.3152 ± 0.0074
$100\theta_{MC}$	1.04092 ± 0.00031	1.04091 ± 0.00032

Tabla 4.1: Valores medios e intervalos de credibilidad del 68 % utilizando los datos de la temperatura, polarización y lente para las cadenas MCMC.

En la figura 4.1 se presenta el mapa de temperaturas del CMB obtenido que se comparó con la misión *Planck* del año 2018. Como se puede observar, las dos imágenes se asemejan con gran precisión donde coinciden las zonas calientes y las zonas frías de cada mapa al observar los rangos de temperatura.

Posteriormente, al analizar las figuras 4.3, 4.2 y 4.4 la coincidencia entre los diferentes espectros es alta, pero debido al ruido de los datos de *Planck* se ve distorsión, que se hace más notoria en la figura 4.3. Este ruido es debido a que se incluye en los datos de *Planck* oficiales la varianza cósmica, citada anteriormente, que ocasiona ese fenómeno.

Luego, en la tabla 4.1 se muestra los parámetros obtenidos mediante el método MCMC y se comparará con los valores de los parámetros cosmológicos de la misión *Planck*. Los parámetros obtenidos coinciden a la perfección con los parámetros de *Planck*, eso es resultado de utilizar el mismo procedimiento que la propia misión por lo que es lo que se cabría esperar.

La gráfica 4.5 se muestra la representación marginal de los parámetros cosmológicos mediante GetDist. Estos parámetros se han obtenido mediante los datos de *Planck* descargados de la página oficial de la misión, se ha utilizado las likelihoods de la misma misión y se ha empleado el método MCMC del programa COBAYA para su obtención. En dicha figura 4.5 se muestra los parámetros obtenidos mediante el método MCMC con los contornos de 68 % y 95 % y se comparará con parámetros de la misión *Planck*. Al visualizar la figura, los parámetros obtenidos por el trabajo quedan eclipsados por los parámetro de *Planck*, ya que la coincidencia es muy alta aunque en algunas ocasiones se puede observar el contorno de color rojo como en la representación del parámetro $\Omega_c h^2$ frente a $\log(10^{10}A_s)$ o τ_{reio} frente a n_s .

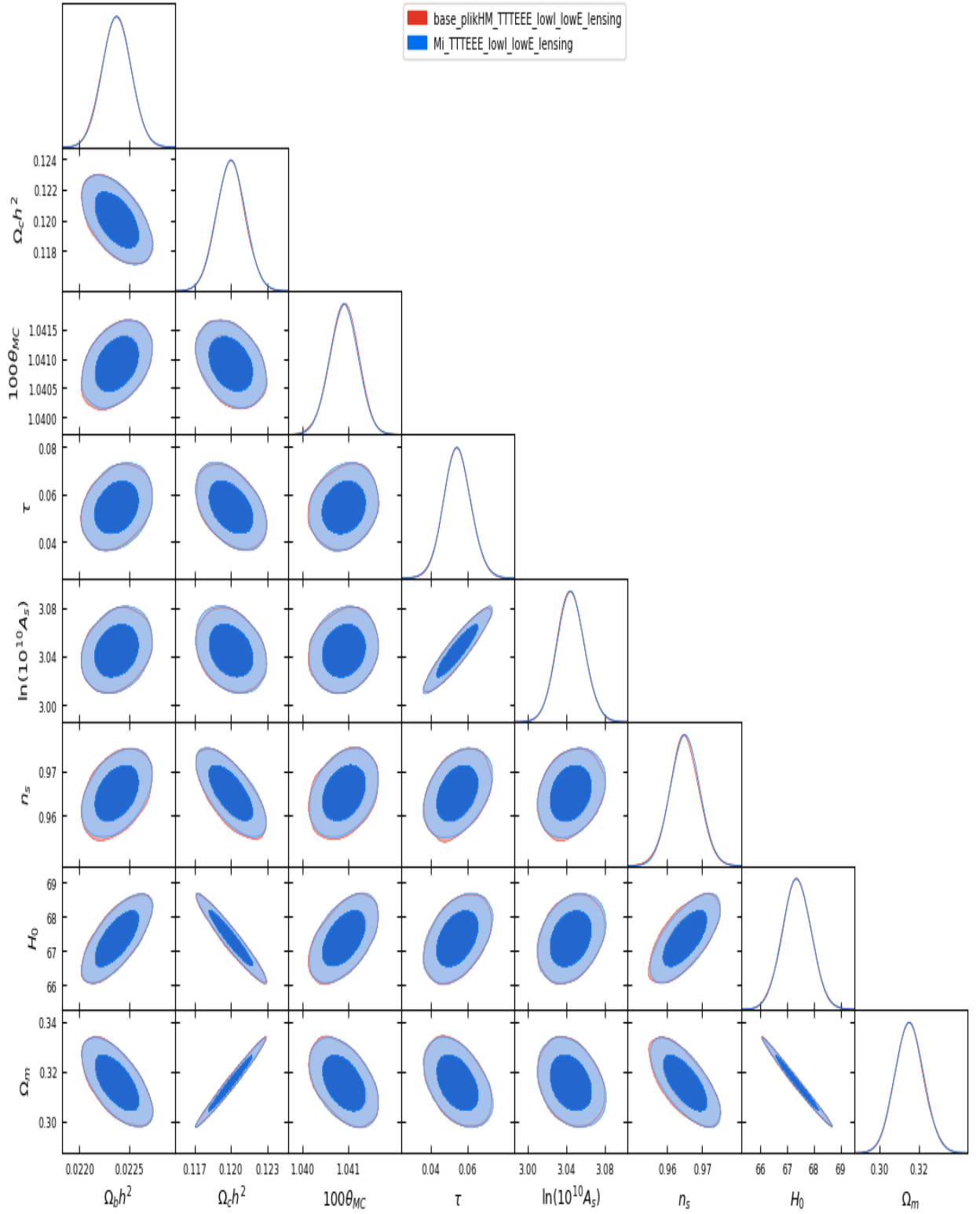


Figura 4.5: Representación de las muestras marginalizadas para los parámetros del modelo de Concordancia utilizando los datos de la temperatura, polarización y lente. De color rojo los parámetros obtenidos por el trabajo, mientras que de color azul los parámetros de la misión *Planck*. El contorno muestra el límite de 68 % y del 95 %. Con una convergencia $R - 1$ de 0.05 para el método.

4.2. Ajuste con los datos de la misión *Planck* + BAO

Para el análisis de los parámetros cosmológicos se utilizó los datos de la temperatura, polarización, lentes y BAO, a estos datos se les denominará "Mi_TTTEEE_lowl_lowE_lensing_BAO", mientras que a los datos oficiales de *Planck* se les denominará "plikHM_TTTEEE_lowl_lowE_lensing_post_BAO". Los datos que se han utilizado para obtener los parámetros cosmológicos han sido los datos descargados de la misión *Planck* y los datos de los BAO's se han obtenido mediante las misiones Sloan Digital Sky Survey [7] y el 2dF Galaxy Redshift Survey [9], ya que COBAYA ofrece la posibilidad de descargar las likelihoods de misiones BAO con sus correspondientes datos.

En primera instancia, se muestra la tabla con los parámetros cosmológicos que se han obtenido junto con los parámetros de la misión *Planck*.

Parámetro	Misión <i>Planck</i> + BAO	Ajuste
$\ln(10^{10} A_s)$	3.047 ± 0.014	3.047 ± 0.014
n_s	0.966 ± 0.004	0.967 ± 0.004
$\Omega_b h^2$	0.02242 ± 0.00013	0.02243 ± 0.00013
$\Omega_c h^2$	0.1193 ± 0.0013	0.1193 ± 0.0009
τ_{reio}	0.056 ± 0.007	0.056 ± 0.007
H_0	67.66 ± 0.41	67.67 ± 0.42
Ω_m	0.3111 ± 0.006	0.3109 ± 0.006
$100\theta_{MC}$	1.04101 ± 0.00029	1.04100 ± 0.00029

Tabla 4.2: Valores medios e intervalos de credibilidad del 68 % utilizando los datos de la temperatura, polarización, lente y BAO para las cadenas MCMC.

La figura 4.6 se muestra la representación marginal de los parámetros cosmológicos mediante GetDist. Estos parámetros se han obtenido mediante los datos de *Planck* y los datos citados anteriormente de las misiones BAOs, se han utilizado las likelihoods de la mismas misiones y se ha empleado el método MCMC del programa COBAYA.

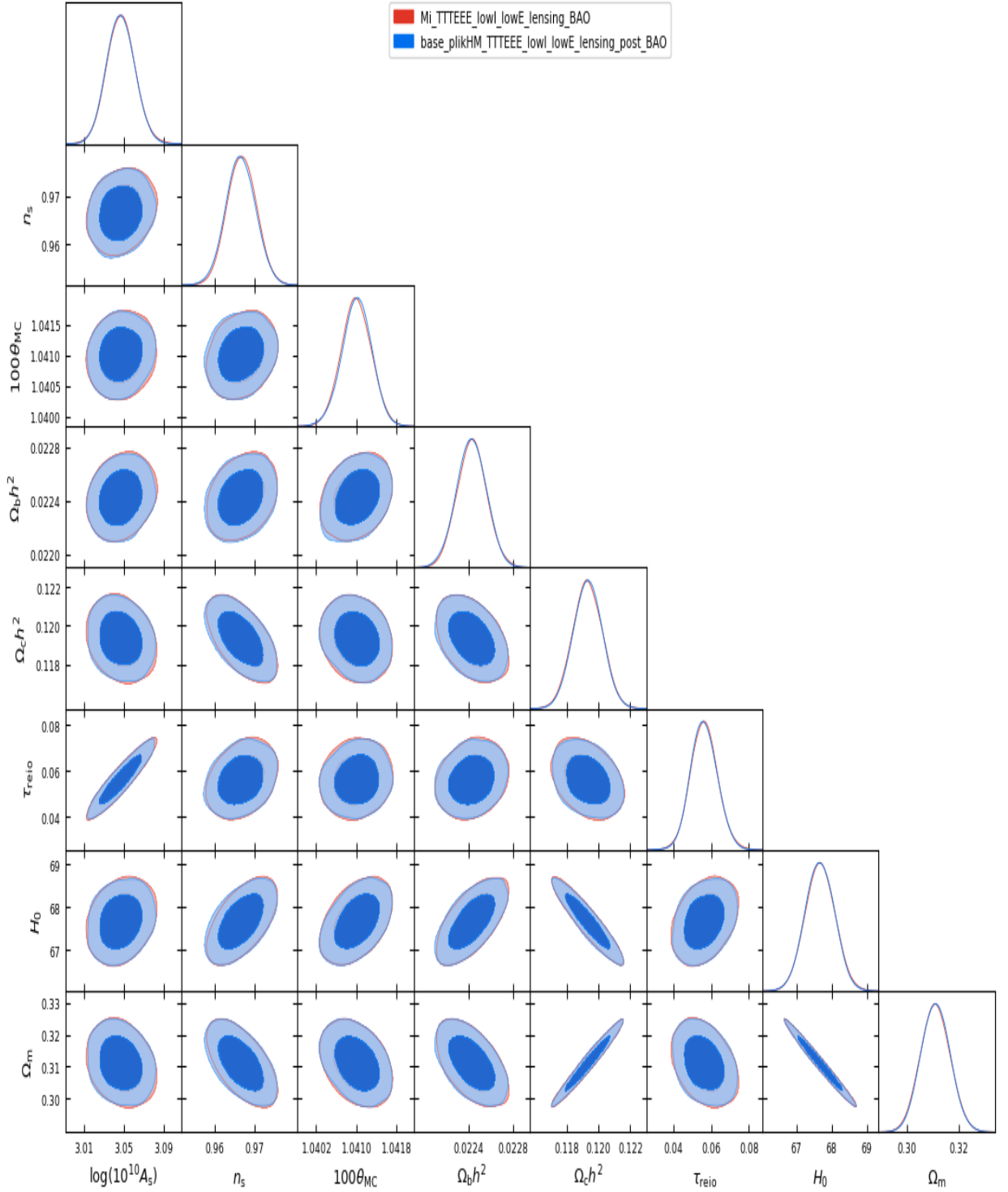


Figura 4.6: Representación de las muestras marginalizadas para los parámetros del modelo de Concordancia utilizando los datos de la temperatura, polarización, lente y BAO. De color rojo los parámetros obtenidos por el trabajo, mientras que de color azul los parámetros de la misión *Planck* + BAO. El contorno muestra el límite de 68 % y del 95 %. Con una convergencia $R - 1$ de 0.075 para el método.

El valor de los parámetros proporcionados en la tabla 4.2 tienen una coincidencia muy alta, pero algunos valores como el H_0 , n_s , Ω_m , Ω_b h^2 poseen una ligera diferencia. Eso puede ser debido a que esta vez el valor de convergencia es mayor que el de los anteriores resultados.

Después, en la figura 4.6 se muestra los parámetros obtenidos al utilizar los datos y likelihoods de *Planck* y BAO. Al compararlo con los parámetros de la misión *Planck* en conjunto con BAO, se tiene una coincidencia casi total ya que ambos contornos están superpuestos como se puede observar.

4.3. Comparación entre los diferentes resultados

En esta última sección se analiza las dos muestras obtenidas por este trabajo y la diferencia que albergan.

En la gráfica 4.7 se observa que los diferentes parámetros tienen una discordancia importante, ya que los contornos de ambas muestras no coinciden de la misma manera que las figuras anteriores. Eso puede ser debido a dos razones, la primera es que la convergencia (R-1) en cada una de las muestras es diferente, en la muestra de *Planck* la convergencia es de 0.05, mientras que la muestra de *Planck* + BAO es 0.075, por lo que la primera muestra debe tener más precisión. Sin embargo, no se percibe dicha característica ya que la segunda muestra que cuenta con datos del BAO se puede ver que sus contornos son más estrechos o del tamaño de la primera muestra de *Planck*.

La otra razón a la que puede ser esa diferencia de contornos es la utilización de mas datos, es decir, de emplear los datos de BAO que al tener el método MCMC más datos por lo tanto la estadística mejora considerablemente y de esta forma se puede obtener parámetros más precisos. Uno de los motivos más importantes por los que aumenta la precisión de la determinación de parámetros es porque añadir datos externos al CMB, como son por ejemplo los BAOs, ayuda a romper degeneraciones en los parámetros, como en la degeneración de la densidad de materia Ω_m y el parámetro de Hubble H_0

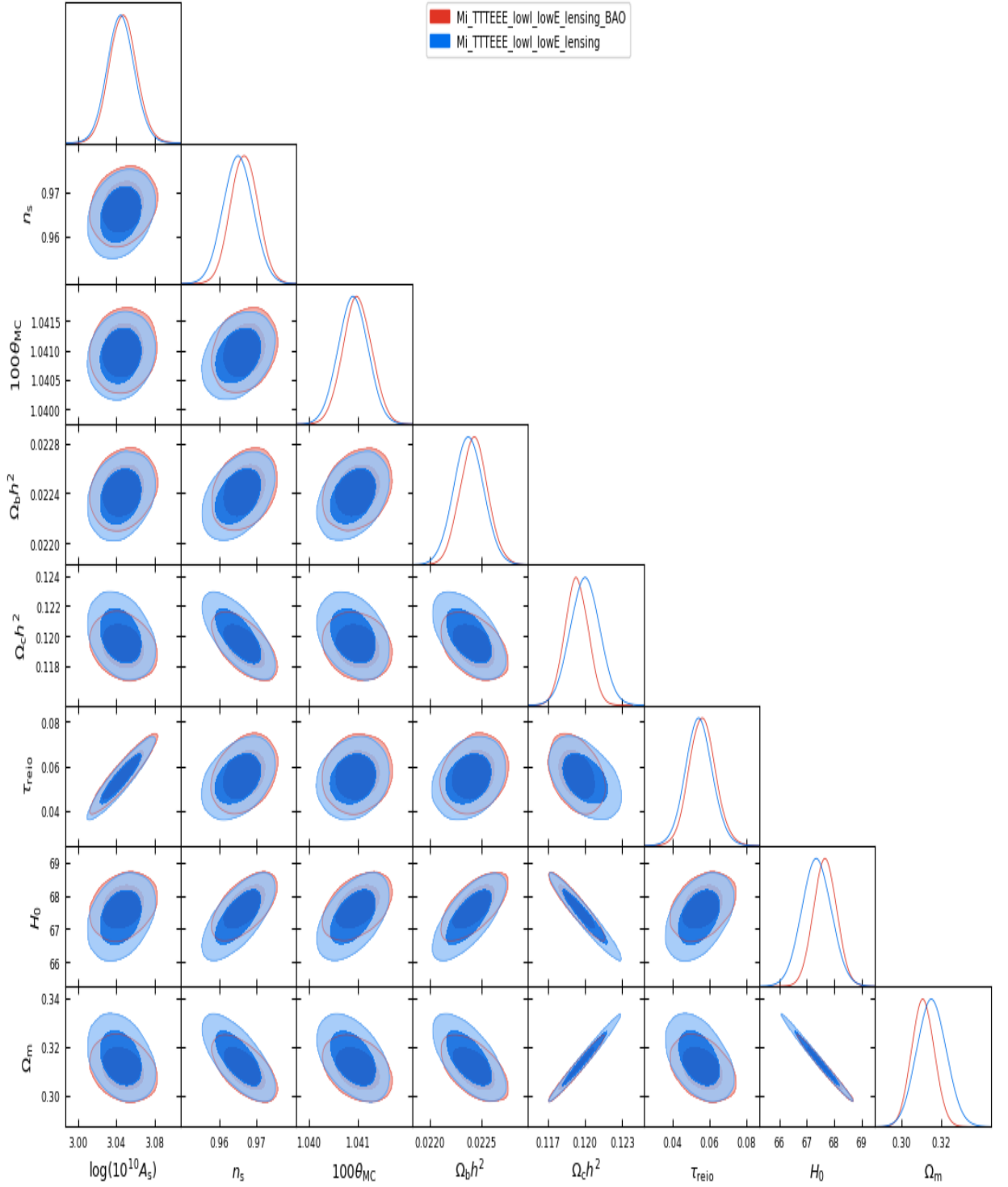


Figura 4.7: Representación de las muestras marginalizadas para los parámetros del modelo de Concordancia, comparando los parámetros obtenidos mediante los datos de la misión *Planck* y los parámetros obtenidos mediante la misión *Planck* + BAO. De color rojo los parámetros obtenidos de *Planck* + BAO, mientras que de color azul los parámetros de la misión *Planck*. El contorno muestra el límite de 68 % y del 95 %.

Capítulo 5

Conclusiones

En este proyecto, se han obtenido diferentes parámetros cosmológicos y espectros angulares de la misión *Planck* 2018. Asimismo, se comprendieron los procedimientos físico, matemático y computacional utilizados por dicha misión. Para lograr lo anteriormente descrito, primero se estudiaron los diferentes procesos que involucran la formación del fondo cósmico de microondas. Posteriormente, se comprendieron las anisotropías del CMB, la naturaleza de las mismas y algunos problemas que acarrea el modelo de Concordancia. Luego, se analizaron las formas de tratamiento de las anisotropías mediante los espectros angulares de la temperatura y polarización. Además, es relevante señalar que los datos se han conseguido de dos fuentes diferentes: por un lado, se han utilizado los datos de *Planck* y, por otro, se ha hecho uso de los datos de los BAO, que es otra alternativa para adquirir información del Universo.

La precisión de los parámetros obtenidos en este trabajo utilizando los datos de la misión *Planck* es inferior a si añadimos los datos de los BAO's, ya que aumenta el tamaño de la muestra. Es preciso añadir que los resultados presentados de los parámetros cosmológicos, espectros angulares y mapa de temperatura concuerdan con bastante precisión con los resultados de la misión *Planck*, debido a que se han utilizado los mismos datos y el mismo procedimiento computacional. Por lo tanto, se ha conseguido corroborar la validez y fiabilidad de los resultados de dicha misión. Asimismo, este trabajo puede ser una guía para que cualquiera pueda instalar el programa COBAYA y comprobar dichos resultados por su cuenta. También se empleó el código de CAMB [22] para los espectros angulares que se puede instalar desde su página web aunque COBAYA lo tiene implementado y el análisis de imágenes de HEALPix [14], que se puede instalar a partir de su página oficial.

Después de entender la parte física y matemática del CMB, se comprendieron los métodos utilizados por la misión *Planck*, que son los métodos *Mark Chain Monte Carlo* (MCMC). Estos métodos se utilizan en muchos sectores de la ciencia (por ejemplo se emplea en los modelos como Ising o probit), informática y matemáticas (obtener integrales definidas). Aprender este tipo de métodos es fundamental para el análisis de grandes conjuntos de datos y ayuda a comprender métodos más complejos.

Para próximas investigaciones, este trabajo puede ser un buen punto de partida para comprender los métodos utilizados en esta misión y aprovecharlo para otro conjunto de datos. Por otra parte, ayudará en la comprensión, procesamiento y análisis posterior de los resultados, ya que explica de manera detallada los métodos MCMC.

Bibliografía

- [1] URL: <https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Sept02/Kinney/Figures/figure3.jpg>.
- [2] URL: <https://francis.naukas.com/2011/07/29/el-efecto-de-sunyaev-zeldovich-demuestra-que-una-burbuja-cosmica-vacia-no-puede-explicar-la-energia-oscura/>.
- [3] URL: <https://www.slideshare.net/SociedadJulioGaravito/los-secretos-escondidos-en-la-radiacin-csmica-de-fondo-por-juan-carlos-muoz-4-de-febrero-de-2017>.
- [4] URL: <http://pla.esac.esa.int/pla/#cosmology>.
- [5] URL: <https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March05/Scott/Figures/figure1.jpg>.
- [6] URL: https://apod.nasa.gov/apod/image/1401/onepercent_boss_3975.jpg.
- [7] Shadab Alam y col. “The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample”. En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 470.3 (2017), págs. 2617-2652. DOI: 10.1093/mnras/stx721. arXiv: 1607.03155 [astro-ph.CO].
- [8] A. Balbi, P. Natoli y N. Vittorio. “The CMB polarization: status and prospects”. En: *arXiv: Astrophysics* (2006).
- [9] Florian Beutler, Chris Blake, Matthew Colless, D. Heath Jones, Lister Staveley-Smith, Lachlan Campbell, Quentin Parker, Will Saunders y Fred Watson. “The 6dF Galaxy Survey: baryon acoustic oscillations and the local Hubble constant”. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 416.4 (2011), 3017–3032. ISSN: 0035-8711. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2011.19250.x. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19250.x>.
- [10] Jordi Cepa. *Cosmología Física*. 1.^a ed. Ediciones Akal S.A, 2007, págs. 375-423.
- [11] Nelson Christensen, Renate Meyer, Lloyd Knox y Ben Luey. “II: Bayesian Methods for Cosmological Parameter Estimation from Cosmic Microwave Background Measurements”. En: *Class. Quant. Grav.* 18 (2001), pág. 2677. eprint: astro-ph/0103134.
- [12] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll y D. T. Wilkinson. “Cosmic Black-Body Radiation.” En: 142 (jul. de 1965), págs. 414-419. DOI: 10.1086/148306.
- [13] J. N. Goldberg y A. J. Macfarlane. “Spin-s Spherical Harmonics and ”. En: *Journal of Mathematical Physics* 8, 2155 (1967). DOI: 10.1063/1.1705135.

- [14] K. M. Górski, E. Hivon, A. J. Banday, B. D. Wandelt, F. K. Hansen, M. Reinecke y M. Bartelmann. “HEALPix: A Framework for High-Resolution Discretization and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere”. En: 622.2 (abr. de 2005), págs. 759-771. DOI: 10.1086/427976. arXiv: astro-ph/0409513 [astro-ph].
- [15] Alan H. Guth. “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems”. En: *Phys. Rev. D* 23 (2 1981), págs. 347-356. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.347>.
- [16] W.K. Hastings. “Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications”. En: *Biometrika* 57 (1970), págs. 97-109. DOI: 10.1093/biomet/57.1.97.
- [17] Alan Heavens. “Cosmology with Gravitational Lensing”. En: 370 (sep. de 2011). DOI: 10.1007/978-90-481-8685-3_3.
- [18] Wayne Hu y Scott Dodelson. “Cosmic Microwave Background Anisotropies”. En: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 40.1 (2002), 171–216. ISSN: 1545-4282. DOI: 10.1146/annurev.astro.40.060401.093926. URL: <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.astro.40.060401.093926>.
- [19] Marc Lachièze-Rey y Edgard Gunzig. *The Cosmological Background Radiation*. 1.^a ed. Cambridge University Press, 1999, págs. 21, 33-65, 109-125.
- [20] Antony Lewis. “GetDist: a Python package for analysing Monte Carlo samples”. En: (2019). arXiv: 1910.13970 [astro-ph.IM]. URL: <https://getdist.readthedocs.io>.
- [21] Antony Lewis y Sarah Bridle. “Cosmological parameters from CMB and other data: A Monte Carlo approach”. En: 66 (2002), pág. 103511. DOI: 10.1103/PhysRevD.66.103511. arXiv: astro-ph/0205436 [astro-ph].
- [22] Antony Lewis, Anthony Challinor y Anthony Lasenby. “Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models”. En: 538 (2000), págs. 473-476. DOI: 10.1086/309179. arXiv: astro-ph/9911177 [astro-ph].
- [23] Nick E. Mavromatos y Vasiliki A. Mitsou. “Magnetic monopoles revisited: Models and searches at colliders and in the Cosmos”. En: *International Journal of Modern Physics A* 35.23 (2020). ISSN: 1793-656X. DOI: 10.1142/s0217751x20300124. URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X20300124>.
- [24] A. A. Penzias y R. W. Wilson. “A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s.” En: 142 (jul. de 1965), págs. 419-421. DOI: 10.1086/148307.
- [25] “Planck Collaboration, Planck 2018 results. V. CMB power spectra and likelihoods”. En: (2018). DOI: 10.1051/0004-6361/201936386.
- [26] “Planck Collaboration, Planck 2018 results. VIII. Gravitational lensing”. En: (2018). DOI: 10.1051/0004-6361/201833886.
- [27] G.O. Roberts, A. Gelman y W.R. Gilks. “Weak convergence and optimal scaling or random walk Metropolis algorithms”. En: *Ann. Appl. Prob.* (1997). <http://www.jstor.org/view/10505164/di984007/98p0121o/0>, págs. 110-120.

- [28] Ashley J. Ross, Lado Samushia, Cullan Howlett, Will J. Percival, Angela Burden y Marc Manera. “The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample – I. A 4 per cent distance measure at $z = 0.15$ ”. En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 449.1 (2015), págs. 835-847. DOI: 10.1093/mnras/stv154. arXiv: 1409.3242 [astro-ph.CO].
- [29] J. S. Speagle. “A Conceptual Introduction to Markov Chain Monte Carlo Methods.” En: (2019). URL: <https://arxiv.org/abs/1909.12313>.
- [30] Jesus Torrado y Antony Lewis. “Cobaya: Code for Bayesian Analysis of hierarchical physical models”. En: (2021). DOI: 10.1088/1475-7516/2021/05/057. arXiv: astro-ph/2005.05290 [astro-ph].
- [31] Matias Zaldarriaga y Uroš Seljak. “All-sky analysis of polarization in the microwave background”. En: *Physical Review D* 55.4 (1997), 1830–1840. ISSN: 1089-4918. DOI: 10.1103/physrevd.55.1830. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.55.1830>.

Apéndice A

Instalación del programa COBAYA

El programa Cobaya en este trabajo se instaló en una maquina virtual y se utilizó Ubuntu. Para empezar, se tiene que cumplir los requisitos del programa, que en este caso solo es tener Python de una versión mayor o igual a 3,6.

- `python3`

Posteriormente, se instala pip que es un instalador de paquetes Python gratuito.

- `python3 -m pip install pip --upgrade`

Después de la instalación del pip se instala el git, que es una herramienta que realiza una función del control de versiones de código de forma distribuida.

- `sudo apt install git`

Se mira la versión del git para ver si se instaló correctamente

- `git --version`

Se clona mediante git el repositorio de cobaya, esta clonación se situará en la carpeta principal de Ubuntu.

- `git clone https://github.com/CobayaSampler/cobaya.git`

Luego, se instala Cobaya mediante este comando:

- `python3 -m pip install --editable cobaya --upgrade`

Para confirmar la instalación de Cobaya, se mira su versión

- `cobaya --version`

Luego se instala los datos cosmológicos de las diferentes misiones en donde se fijará donde se quiere instalar dichos datos.

- `cobaya-install cosmo -m (dirección de instalación)`

Después, se instala pyqt5 y pyside2 para poder obtener la interfaz del Cobaya. Estos dos programas son bindings que sirven para las herramientas de interfaz gráfica de usuario.

- `python3 -m pip install pyqt5 pyside2`

Posteriormente, se llama a la interfaz de cobaya en donde se tiene diferentes opciones para trabajar, introduciendo las características que uno quiere o directamente se puede usar las propiedades que utilizaron las misiones. Acto seguido se guarda las características introducidas en un archivo, donde se te da dos opciones formato yaml o Python

- `cobaya-cosmo-generator`

Después de guardar el archivo saliente, se ejecuta introduciendo el siguiente comando, facilitando la dirección del archivo.

- `cobaya-run (dirección del documento)`

Y finalmente, después de que termine de ejecutarse el archivo de salida se creará una carpeta. Dicha carpeta alberga los datos obtenidos, los cuales se pueden introducir en el programa getdist, que es un paquete de Python para analizar muestras de Monte Carlo, incluyendo muestras correlacionadas de Markov Chain Monte Carlo.

- `getdist-gui`